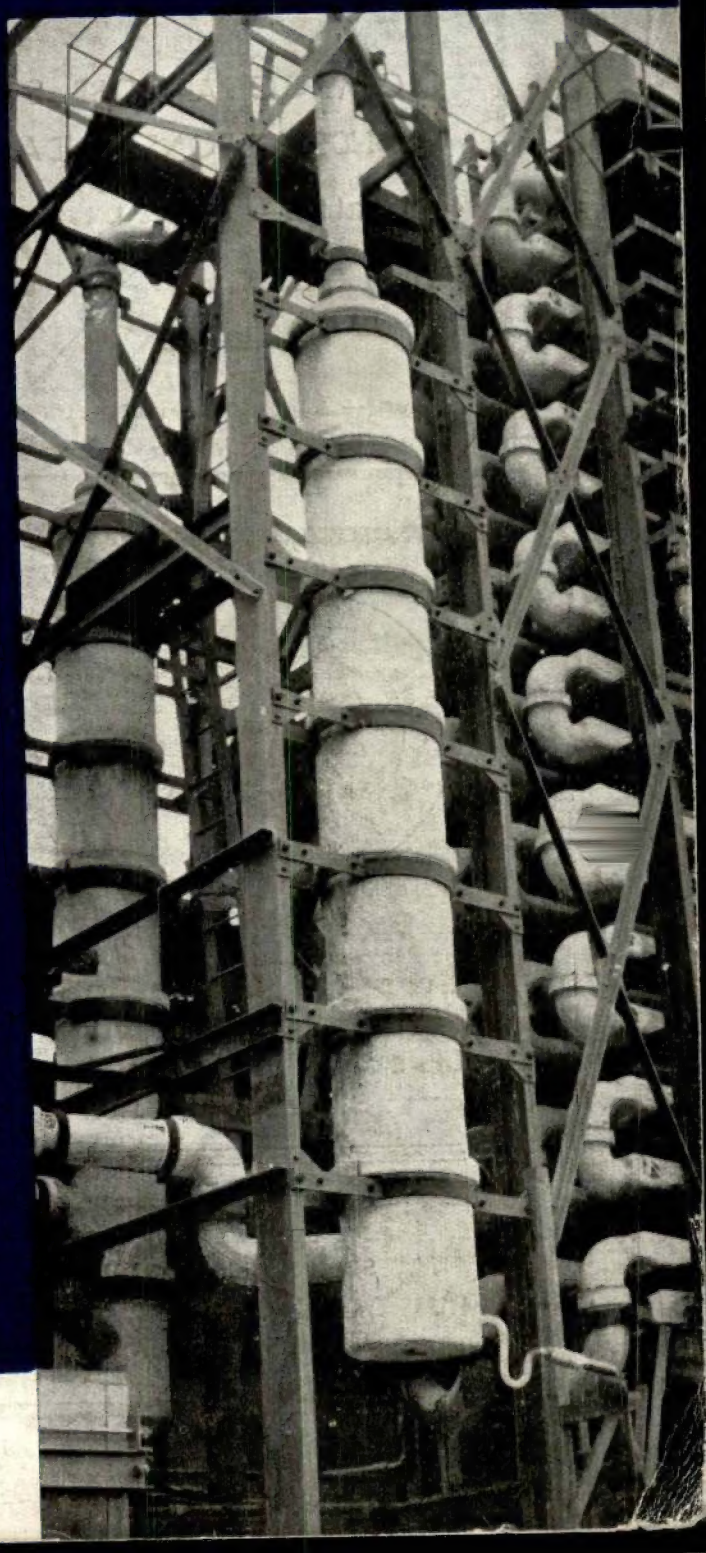
TÉCNICA



REVISTA DE ENGENHARIA DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 241 - ABRIL - 1954

CIMENTO SECIL

O CIMENTO PARA OBRAS DE GRANDE RESPONSABILIDADE

4 fornos rotativos — 300.000 toneladas anuais

Fábrica no Outão — Setúbal

Lisboa — Rua do Comércio, 56-3.°

Desde o Distrito de **VIANA DO CASTELO** ao de **LEIRIA** e nos Distritos de **SETÚBAL** e **ÉVORA** as

FÁBRICAS
CIDADES
VILAS e
ALDEIAS portuguesas

são abastecidas de

ELECTRICIDADE

para

FORÇA MOTRIZ E TODOS OS USOS INDUSTRIAIS, LUZ ETC., a TARIFAS MUITO VANTAJOSAS e com as maiores facilidades,

pela

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA

e produzidas nas CENTRAIS:

Thérmica do FREIXO .... 22.000 CV
Hidráulica do LINDOSO.. .. ... 100.000 CV
Thérmica da CACHOFARRA... 14.000 CV

Os Escritórios da UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA são:

NO PORTO Rua Duque de Loulé, 240
EM LISBOA R. António Maria Cardoso, 13, 2.°

CIMENTO TEJO

FÁBRICA EM ALHANDRA

A instalação mais moderna do País. Dois fornos rotativos em laboração. — O "CIMENTO TEJO" marca pelas suas altas resistências e regularidade, garantidas pela fiscalização contínua de todas as fases do fabrico, exercida por técnicos portugueses especializados.

Pedidos à Companhia **"CIMENTO TEJO"**

SEDE EM LISBOA
RUA DA VITÓRIA, 88, 2.°

FILIAL NO NORTE
AV. DOS ALIADOS, 20, 3.°
PORTO

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA DOS ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Ano XXIX - N.º 241 Abril de 1954

Redacção e Administração: AVENIDA ROVISCO PAIS, I.S.T. * LISBOA-N. * TELEF. 77 0144 (Linha 50)

DIRECTOR
JOSÉ MANUEL DA CRUZ MORAIS

ADMINISTRADOR
FERNANDO MARQUES DE OLIVEIRA

SECRETARIO
VIRGÍLIO DOS REIS CARDOSO IGREJA

CORPO REDACTORIAL
ANTÓNIO SEVERINO PINTO
CARLOS M. NOGUEIRA MARTINS
JOÃO PEDRO ANTUNES GOMES
LUIZ F. LUCENA FERREIRA

NUMERO AVULSO 12$50

ASSINATURAS:

	3 N.os	5 N.os	10 N.os
Continente e Ilhas	32$50	50$00	95$00
Colónias Portuguesas e Estrangeiro	—	55$00	100$00

EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ESTUD. DO I.S.T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NA
Tip. JORGE FERNANDES, L.DA
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Torre de absorpção de ácido clorídrico, da fábrica de sulfato de sódio da Comp. União Fabril, no Barreiro.

Págs.

Simplificação e síntese na Engenharia Moderna
Pelo Eng.º Quím.-Ind. Vergílio Rui Teixeira Lopo 379

Utilização de modelos no estudo de antenas
Pelo Eng.º Dipl. (I. S. T.) António A. de Carvalho Fernandes 385

Notas informativas — **Elementos sobre a produção e consumo de energia na rede eléctrica nacional** 394

O método de relaxação — Sua aplicação aos reticulados contínuos
Pelo Eng.º Civil (U. P.) João Araújo Sobreira 395

A integração e a diferenciação eléctricas de algumas funções usuais
Pelo Eng.º Electrot. (I. S. T.) Manuel José Lopes da Silva . . . 413

Sobre a noção de rendimento duma transmissão mecânica
Pelo Eng.º Mec. (I. S. T.) Francisco de Almeida e Castro . . . 421

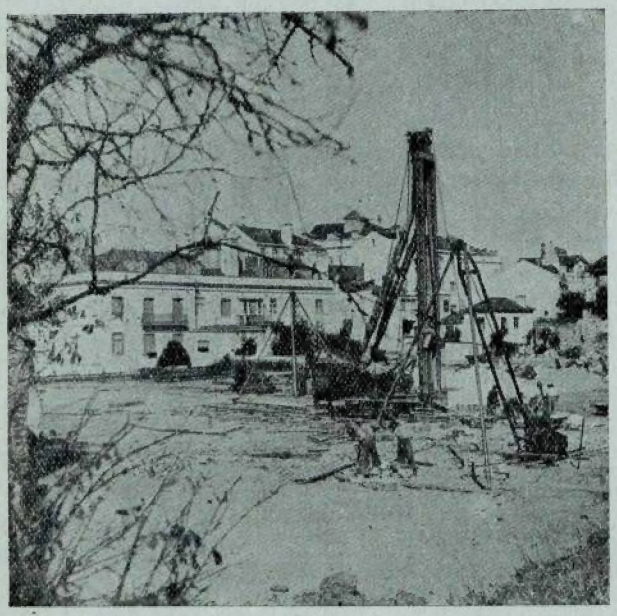
Ensaios de compressão triaxial sobre misturas betuminosas
Por Francisco Vizeu Pinheiro 425

Do Mundo Técnico 435

Biblioteca 440

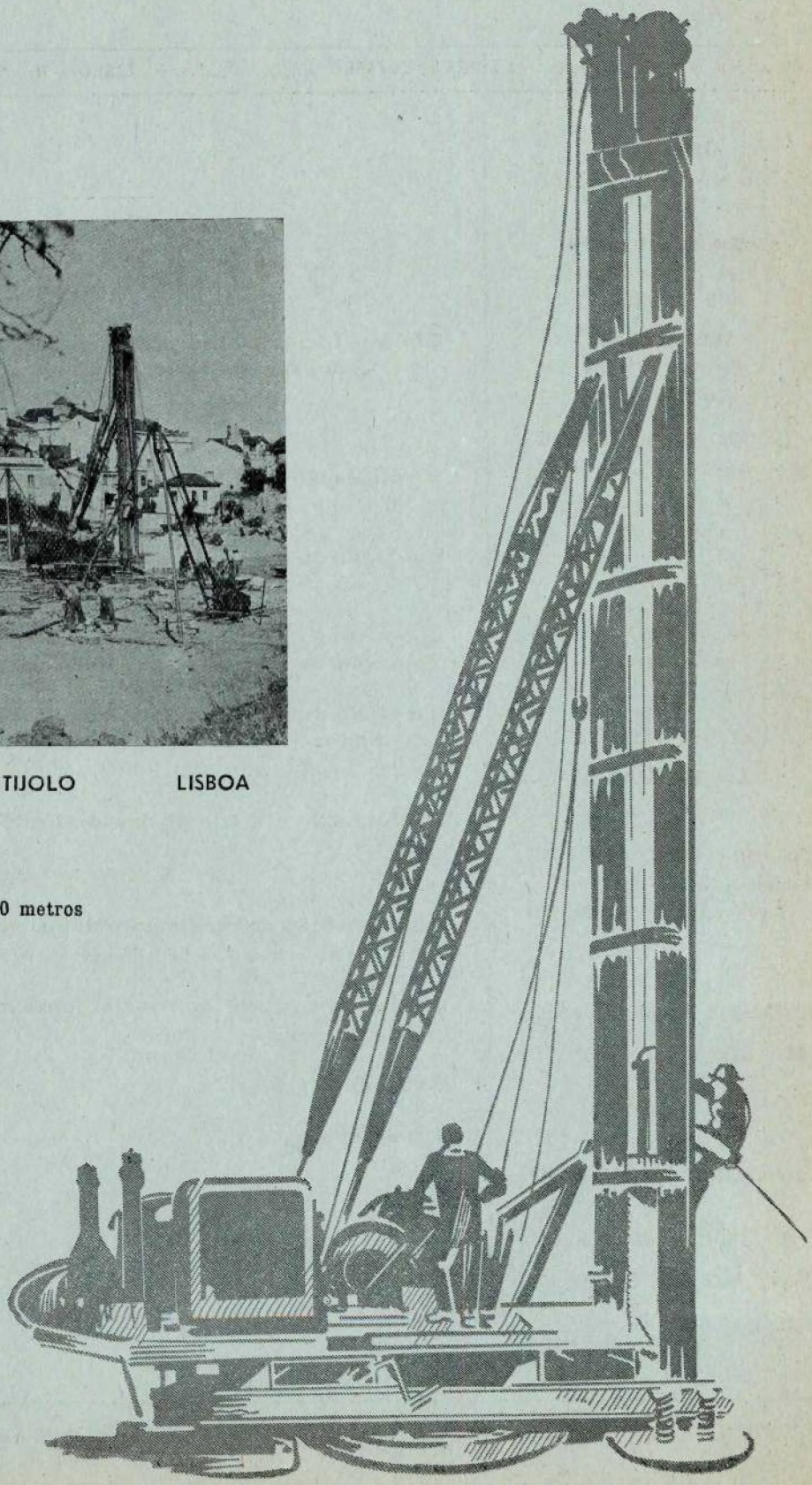
OS ARTIGOS PUBLICADOS NESTA REVISTA SÃO DE EXCLUSIVA RESPONSABILIDADE DOS AUTORES

FUNDAÇÕES FRANKI



MERCADO FORNO DO TIJOLO LISBOA

163 estacas ø 305 mm.
146 estacas ø 406 mm.
51 estacas ø 520 mm.
Comprimento total — 2.020 metros



SOCIEDADE
CONSTRUTORA
PORTUGUESA, L.DA
P. DO AREEIRO, 9, 4.º-E.
TELEF. 7 6061 - LISBOA

TÉCNICA

DIRECTOR — JOSÉ M. CRUZ MORAIS ADMINISTRADOR — FERNANDO MARQUES DE OLIVEIRA
SECRETÁRIO: VIRGÍLIO DOS REIS CARDOSO IGREJA
CORPO REDACTORIAL — ANTÓNIO SEVERINO PINTO, CARLOS M. NOGUEIRA MARTINS, JOÃO PEDRO ANTUNES GOMES E LUIZ F. LUCENA FERREIRA

Ano XXIX - N.º 241 Abril de 1954

C. D. 378 : 66

Simplificação e Síntese na Engenharia Moderna

PELO ENG.º QUÍMICO-INDUSTRIAL VERGÍLIO RUI TEIXEIRA LOPO

O «Centro de Aperfeiçoamento Técnico» de Paris publicou, num só volume, um interessante conjunto de conferências subordinadas ao título comum de «Cinquenta Anos de Aperfeiçoamento Técnico», com o objectivo de «mostrar como o período de 1900 a 1950 foi fecundo em progressos no domínio da química aplicada».

Em duas dessas conferências foi examinada, com particular objectividade, a evolução da metalurgia nos seus aspectos mais característicos, quer no campo da siderurgia quer no campo dos metais não ferrosos. Em ambas se comparou a herança que o século XIX legou neste domínio, com a posição actual dos conhecimentos e principalmente das aplicações — de modo a poderem determinar-se, numa primeira aproximação, as principais tendências da evolução neste sector da Engenharia.

Na primeira, o Eng.º Delbart, director do I. R. S. I. D., nota que a produção mundial de aço, que era de 28 milhões de toneladas em 1900, ultrapassa hoje 180 milhões, mas que «os principais processos da sua fabricação, ainda actualmente em uso, estavam já criados na aurora deste século», pelo que a evolução da siderurgia consistiu fundamentalmente num sucessivo aperfeiçoamento dos métodos de elaboração e de transformação, concretizados em inúmeros aperfeiçoamentos de realização técnica.

Por seu turno, o Eng.º P. Bastien, professor da Escola Central de Artes e Manufacturas e Director Científico dos Estabelecimentos Schneider, conclui que os progressos da Metalurgia no domínio dos metais não ferrosos e suas ligas, constituem uma soma considerável de meios tendentes a promover o acréscimo da produção e o abaixamento do preço de venda, melhoria de rendimentos, obtenção de regularidade, aumento de pureza e criação de «metalurgias novas quer de metais correntes, quer de metais de utilização recente».

A constatação das realizações em que se concretizou esta evolução — desde os processos de tratamento dos finos de minérios de ferro, das sucessivas melhorias na qualidade dos aços pelos progressos na técnica dos tratamentos térmicos, até os mais recentes conhecimentos no campo da fabricação de ligas resistentes à corrosão e à metalurgia dos metais em pó — leva naturalmente a procurar conhecer os «pontos de apoio» em que se alicerçou e os «meios de acção» que a asseguraram.

Sem demasiada preocupação de rigor, poder-se-á dizer que esses «pontos de apoio» foram os conhecimentos de Termodinâmica que progressivamente tem vindo a utilizar; e que os «meios de acção» que a tornaram possível foram especialmente os métodos físicos de análise e de controle de produção, sucessivamente aperfeiçoados para satisfazerem às imposições crescentes na composição das ligas fabricadas e às exigências de pureza dos metais — na maior parte dos casos obtidos a partir de matérias primas gradualmente mais pobres.

As linhas gerais que têm presidido a esta evolução não se podem procurar apenas nos últimos cinquenta anos de progresso que as conferências citadas consideraram, porque os seus fundamentos se encontram ainda nas estruturações termodinâmicas do século XIX ; mas as suas possibilidades latentes hão-de encontrar-se certamente na multiplicidade dos últimos progressos e na aplicação, cada vez em maior escala, desses mesmos conhecimentos.

Efectivamente, se bem que o desenvolvimento inicial que o convertidor Bessemer (1855), o forno Siemens-Martin (1865) e o convertidor Thomas (1878), vieram dar à siderurgia tenha tido, de princípio, como preocupações dominantes questões de ordem mecânica que lhe permitissem resolver os problemas que levantou a grande procura de aço a partir de qualquer tipo de gusa — encontrou, logo a seguir aos seus primeiros progressos tecnológicos, elementos de ordem físico-química que lhe vieram permitir resolver problemas de qualidade, postos com importância crescente ao longo dos anos.

Assim, nos últimos trinta anos do século passado conheciam-se já a lei de Guldberg e Waage, a lei das fases de Gibbs, a lei de repartição de Nernst e a lei de Le Chatelier-Vant'Hoff, que permitiram realizar os primeiros estudos sobre equilíbrios químicos em meios homogéneos. E já Le Chatelier previa em 1888 que «as investigações de natureza teórica sobre os equilíbrios químicos eram de maior aplicação prática que aquilo que se poderia ser inclinado a prever, visto que estes intervinham na maior parte das operações da indústria química».

No entanto, embora o interesse da aplicação da termodinâmica à metalurgia fosse já reconhecido por alguns cientistas da última década do século XIX, a sua função como ciência aplicada estava ainda essencialmente ligada ao problema da transformação de calor em trabalho, com carácter incomparàvelmente mais restrito que o que tem hoje como «ciência das transformações da energia em geral» (1).

Assim, o conceito de energia livre veio a revelar-se de interesse fundamental na indicação do sentido das reacções cuja realização experimental se tornava difícil comprovar.

O conceito de entropia passou a ter especial importância na combinação da termodinâmica com a mecânica estatística, «nas regiões onde aquela não é aplicável, quer pela falta dos necessários dados empíricos, quer pela irreversibilidade essencial dos processos em estudo» (2). Deste modo, a mecânica estatística veio a constituir um precioso complemento da termodinâmica metalúrgica sempre que as baixas velocidades de reacção no estado sólido impedem a medida dos coeficientes de actividade e dos calores de reacção. Permitiu generalizar as aplicações da termodinâmica ao estudo dos sistemas cristalinos, com tanto maior rigor quanto maior a aproximação entre as estruturas mais prováveis e as estruturas verdadeiras ; e veio completar o papel da termodinâmica com a determinação das velocidades com que os equilíbrios são atingidos.

O conceito de actividade, ultrapassou igualmente a ideia original de Lewis, e pôde aparecer, quase meio século depois, no estudo de velocidades de transformação reguladas pela difusão através de filmes de adsorpção (3).

Com a generalização dos conhecimentos da termodinâmica e a sua aplicação à metalurgia, conseguiu-se a interpretação de muitos fenómenos que as condições de realização experimental não podiam, só por si, explicar, apesar do relativo desenvolvimento tecnológico das operações básicas em que intervinham. E da maior clareza — e, portanto, maior domínio — dos fenómenos interpretados, resultou insensìvelmente um novo progresso no campo de acção respectivo, a que correspondeu quase sempre uma *simplificação* dos processos de realização prática — até que uma nova necessidade de interpretação apareceu, aguardando nova generalização de conhecimentos fundamentais que os interpretasse e que os sintetizasse.

Foi assim que as leis dos equilíbrios químicos explicaram o facto, já então experimentalmente averiguado, de que o teor de óxido de carbono existente à saída do alto forno não diminuía pelo

---

(1) J. B. Austin. Contribution of Termodynamics to Metallurgical Research and Operations.

(2) Zener. The Role of Statistical Mechanics in Physical Metallurgy.

(3) J. P. C. Fisher – Transactions of the A. I. M. M. E., vol. 175, 1948.

facto de as dimensões do forno serem aumentadas. E que passou a poder determinar-se numa base racional o balanço do alto forno, se bem que o estudo deste, sob o aspecto termodinâmico, se não possa ainda hoje considerar muito avançado, pela dificuldade de estudar separadamente os efeitos de equilíbrio e de velocidade.

Pela mesma via se esclareceu — só para exemplificar — o poder de desoxidação do boro ([1]) e se determinou o coeficiente de repartição do manganês, do enxofre e do fósforo pela escória e pelo metal, em condições nas quais a experiência directa se tornava difícil. E é pelo estudo termodinâmico dos equilíbrios gás-metal que se pode predizer a tendência para a oxidação de um dado metal numa dada atmosfera e em determinadas condições de temperatura — o que permitiu o desenvolvimento dos aços inoxidáveis.

É de esperar que seja ainda segundo esta mesma evolução que se venham a resolver os problemas hoje existentes quanto à modificação em curso, de alguns dos processos metalúrgicos fundamentais — como os que procuram substituir o coque por carvões de baixa qualidade e compensar a pobreza das matérias primas na fabricação de ferro e, eventualmente, os da produção de certos metais não ferrosos.

* * *

A evolução das aplicações da termodinâmica à metalurgia foi resumida no interessante trabalho de J. Austin — Contributions of Thermodynamics to Metallurgical Research and Operations — como sendo o «estabelecimento de uma base na qual as velhas e vagas ideias da arte metalúrgica puderam ser transformadas em conceitos precisos de uma ciência metalúrgica».

O seu poder e a sua beleza residem, segundo Zener ([2]), na sua generalidade. E o alargamento do domínio de validade dos seus conceitos será feito «complementando as generalizações clássicas da termodinâmica por generalizações e postulados adicionais».

Esta «generalização de generalizações foi esquematizada por P. W. Bridgman ([3]) a propósito da extensão das leis da termodinâmica ao domínio sub-microscópico, nos seguintes termos, aproximados mas muito curiosos:

«Seja dado um conjunto de instrumentos físicos de uma certa escala de grandeza. Com estes instrumentos façamos medições exaustivas do estado de um determinado sistema físico e, de acordo com essas medições e com as nossas teorias, procuremos definir os estados futuros do sistema. Então, quase nunca encontraremos o sistema num tal futuro estado *como medido por esses mesmos instrumentos*, de modo que teremos de admitir, para dar uma explicação teórica desse facto, a existência de pormenores no estado inicial, de tal modo imperceptíveis que não podem ser revelados sem a criação de novos instrumentos».

Dentro destas mesmas ideias, poder-se-á dizer, por outras palavras, que «o poder e a beleza da termodinâmica» residem no grande valor dos seus conceitos como *sínteses* de conhecimentos, de elevado potencial de aplicação; e que a elaboração dessas sínteses resultou do sucessivo acréscimo de conhecimentos que houve necessidade de interpretar ou relacionar.

As suas limitações como *sínteses* resultarão do aparecimento de novos conhecimentos que não possam ser incluídos no seu domínio de validade, ou da necessidade de precisar determinadas «medições» para as quais não sejam já suficientes os primitivos «instrumentos de medida».

Em qualquer dos casos, a nova *síntese* que será forçoso construir, englobará a anterior, e o seu maior grau de perfeição em relação a esta, estará precisamente na possibilidade de incluir maior soma

---

([1]) Darken and Larsen — Transactions of the A. I. M. M. E., vol. 150, 1942.

([2]) Ob. cit.

([3]) The Principles of Thermodynamics.

de conhecimentos ou de variáveis. Mas em nenhum caso resultará de *simplificações* apriorísticas, isto é, da eliminação de fenómenos ou factores que nela não possam ser incluídos.

Toda a simplificação será feita, portanto, *a posteriori* — quer se venha a traduzir numa mais fácil interpretação dos fenómenos estudados, quer na criação de normas mais simples de realização prática ([1]), quer ainda na elaboração mais rápida de cálculos de aplicação ([2]).

* * *

O progresso da Metalurgia por meio da integração dos seus conhecimentos e dados experimentais nas *sínteses* da termodinâmica é, nas suas linhas gerais, comparável ao dos outros sectores da Engenharia em relação às leis científicas em que se baseiam.

Quer se tenha traduzido por modificações de métodos fundamentais de tratamento, quer por aperfeiçoamentos de ordem tecnológica de métodos anteriormente existentes ([3]), este progresso representa hoje uma multiplicidade de conhecimentos que reflecte aliás a complexidade actual de todas as tecnologias.

A necessidade da *especialização* resultou, portanto, naturalmente dessa complexidade de conhecimentos tecnológicos acumulados. Poder-se-á mesmo dizer, com aparente contradição, que foi da generalização das noções adquiridas que resultou o carácter restrito, embora profundo, dos conhecimentos dos especialistas. Mas não se discutirá, por certo, que a especialização passou a constituir a melhor garantia de eficiência e de rendimento nas operações de produção e de pesquisa; por outras palavras, a verdadeira origem da consistência da estrutura técnica da engenharia moderna.

No entanto, como meio de progresso que é, a especialização terá que possuir um carácter dinâmico, que lhe permita acompanhar a evolução dos conhecimentos básicos em que assenta e, para isso, terá de dispor, em cada momento, de meios de ampliação das suas possibilidades ou de interpretação de novos factores de ordem experimental que descobrir.

Por outro lado, terá necessàriamente que integrar-se na estrutura técnica do conjunto ou da organização em que se exerce, a fim de que os seus resultados se orientem no sentido da realização do objectivo final para que convergem.

Para satisfazer a primeira condição, o especialista tem de dispor de meios *simples* que lhe permitam a todo o momento a actualização indipensável dos seus conhecimentos básicos, isto é, de formação científica em que se apoie no estudo dos problemas novos que vão surgindo.

Para se poder integrar na estrutura técnica do conjunto em que se exerce, tem de reduzir a fórmulas *simples* os seus resultados, para poderem ser conjugados com os dos restantes especialistas da organização a que pertence; ou, empregando uma esquematização diferente, para poderem servir as «articulações» ([4]) mais complexas em que têm directamente de intervir.

Este aspecto relativo da *simplificação* e da *especialização*, tem sido insistentemente realçado em revistas da especialidade, principalmente americanas, como meio indispensável de evitar a dissipação de esforços e, portanto, de impulsionar o progresso geral.

O interesse que o assunto tem merecido como elemento de formação profissional, é fàcilmente compreensível perante a complexidade dos conhecimentos actuais. E apenas haverá que discutir se o carácter antagónico que tem sido por vezes atribuído ([5]) aos conceitos de simplificação e de especialização se justifica, em face do aspecto complementar que parece poder deduzir-se das considerações anteriores.

([1]) Ver por ex. Simplification du Travail-Relatório da Missão Francesa de Productividade aos Estados Unidos (L'Industrie Chemique, Nov. 51, pág. 319-322).

([2]) «Modern trends in equipment design are toward simplicity, trouble free operation and automatic control» — David Pierce – Industrial and Engineering Chemistry, Março, 51.

([3]) Como é pròpriamente o caso da Metalurgia. Por ex. no caso da Metalurgia do Cobre – «Technical developments apart, slow progress has been made with the development of improved or new principles of smelting» – (Ruddle-The Physical Chemistry of Copper Smelting).

([4]) Eng. Luís Alves, «Técnica», Outubro, 1952.

([5]) Chemical Engineering, Fev. 1954–Simplification, not Specialization.

* * *

Os conceitos de *simplificação* e de *síntese* aparecem-nos, em última análise, na Engenharia Moderna como correspondendo a ideias que se interligam e completam, e cujo significado se torna impreciso quando consideradas isoladamente.

O seu interesse reside no facto de constituirem normas de trabalho e de organização, fundamentais em todos os sectores da Engenharia, a qualquer nível de conhecimentos e em qualquer posição da «estrutura técnica». A sua interpretação racional constitue garantia segura da utilização máxima dos conhecimentos, pela necessidade a que a síntese obriga, de considerar todos os factores do campo de acção a que se estende, e de equilíbrio de conjunto, pela delimitação de funções que dela tem de resultar — com a consequente repercussão no rendimento de trabalho, pela simplificação a que dá origem.

Mas toda a simplificação, para ter sentido, para inspirar confiança e para ter valor executivo directo, tem de resultar de uma síntese prèviamente elaborada. Não sendo assim, pode correr o risco de se transformar numa simplicidade aparente que não representa uma «síntese» das dificuldades necessárias para a sua elaboração.

A síntese resulta, pois, de um trabalho metódico, persistente e minucioso que se traduz em resultados simples, mas que pressupõe uma preparação adequada em todos os níveis de especialização; ou, exprimindo a ideia de outro modo, «a síntese constitue, na realidade, a verdadeira simplificação formativa» (1).

Mas é evidente que a sua elaboração não é isenta de esforço e de dificuldades, e que a maior parte das vezes não segue os caminhos aparentemente mais curtos e mais directos de a encontrar. No entanto, só deste modo se consegue estruturar uma orgânica consistente, sem a qual não é possível contribuir com eficiência para o progresso contínuo e seguro da Engenharia actual.

---

(1) Eng.º Luís Alves, «Técnica», Março de 1954.

ALUNOS PREMIADOS NO ANO LECTIVO DE 1952-53

PRÉMIOS

«Doutor Mira Fernandes»

destinado ao aluno mais classificado nas cadeiras de Cálculo Diferencial, Integral e das Variações e Mecânica Racional.

Aluno n.º 3228, *João Manuel Midosi Bahuto Pereira da Silva Martins Pereira.*

«Francisco da Fonseca Benevides»

destinado ao aluno mais classificado na cadeira de Física Geral e Experimental.

Aluno n.º 3160, *António Manuel Malheiro Dias de Campos.*

«Tomaz Bordalo Pinheiro»

destinado aos três primeiros alunos mais classificados na cadeira de Desenho Técnico.

1.º classificado — aluno n.º 3600, *Narciso Teófilo Pires Elias*
2.º classificado — aluno n.º 3432, *Armando Nunes Pires Cameira*
3.º classificado — aluno n.º 3576, *Ricardo José Minotti da Cruz Filipe.*

«Saraiva de Carvalho»

destinado ao aluno mais classificado na cadeira de Pesquiza e Exploração de Minas.

— não foi concedido —

destinado ao aluno mais classificado no último ano do curso de engenharia electrotécnica.

Aluno n.º 2271, *Joaquim Pires Chicau.*

«Dr. Mário Bastos Wagner»

destinado ao aluno mais classificado na especialidade de engenharia químico-industrial.

Aluno n.º 3501, *Fernando de Melo Alves da Silva.*

«Bandeira de Melo»

destinado ao aluno mais classificado em qualquer dos cursos de engenharia.

Minas — não foi concedido
Electrotécnica — aluno n.º 2509, *Manuel Alves Marques*
Mecânica — aluno n.º 2565, *António Maria Caetano Carreira*
Químico-industrial — aluno n.º 2501, *Fernando de Melo Alves da Silva.*

«Dr. Brito Camacho»

destinado ao aluno que concluir com maior classificação qualquer dos cursos professados neste Instituto.

Aluno n.º 2501, *Fernando de Melo Alves da Silva.*

C. D. 531.053:621.396.67

UTILIZAÇÃO DE MODELOS NO ESTUDO DE ANTENAS

PELO ENG.º DIPL.º (I. S. T.) ANTÓNIO A. DE CARVALHO FERNANDES, M. I. R. E., A. M. I. E. E.

Sumário

No caso de antenas formadas por condutores perfeitos e situadas no espaço livre, as suas características de radiação dependem da relação das dimensões lineares para o comprimento de onda. Daqui, a ideia de usar antenas-modelo numa «escala» que seja a mesma para as dimensões lineares e para o comprimento de onda a utilizar. As vantagens de utilizar modelos reduzidos são evidentes pela comodidade de ensaio que proporcionam. Há, contudo, que tomar precauções na análise dos resultados obtidos com modelos e na sua generalização para o caso de antenas de maiores dimensões pois que, como aqui se demonstra, é, na maioria dos casos, impossível realizar modelos reduzidos que sejam perfeitos. Tendo em atenção a condutibilidade finita dos condutores da antena e, de maneira geral, as características eléctricas e magnéticas desses condutores e dos meios na vizinhança da antena, estabelecem-se, a partir das Equações de Maxwell, as relações a que devem obedecer os «factores de escala» das diferentes grandezas em jogo, para se conseguir um modelo perfeito sob o ponto de vista electromagnético. Nos casos práticos correntes, conclui-se que num modelo reduzido na escala de 1/n, a condutibilidade dos condutores do modelo deverá ser n *vezes maior que a dos da antena real; considerando que, na prática, se usam condutores de cobre, e que só a prata tem uma condutibilidade ligeiramente maior que a do cobre, reconhece-se a impossibilidade de obedecer rigorosamente a esta condição para os casos de maior interesse prático em que* n *está compreendido entre 10 e 500*

A circunstância de se não satisfazer o condicionamento da escala de condutibilidade pode afectar ou não as conclusões obtidas com antenas-modelo. Isto depende da natureza do problema em estudo e do tipo de antena. No que se refere a diagramas de radiação, estes parecem ser mais afectados no caso de antenas com onda estacionária do que no caso de antenas com onda progressiva. Conclusões genéricas sobre este aspecto do problema são apresentadas e ilustradas com casos práticos. De um modo geral, haverá sempre que tomar as devidas precauções na generalização, para outras frequências, dos resultados obtidos com a frequência de ensaio de uma antena-modelo.

1. Introdução

A realização de ensaios com modelos reduzidos de antenas tem, evidentemente, grande interesse pela comodidade e, em geral, pouco dispêndio com que essas antenas, pelas suas pequenas dimensões, podem ser construídas e ensaiadas.

Sob o ponto de vista profissional, os ensaios com antenas-modelo são especialmente úteis quando, por exemplo, haja que verificar conclusões obtidas teòricamente; quando se pretendam obter elementos cujo estudo teórico é ou muito trabalhoso ou, nalguns casos, impossível de fazer; e quando, tendo-se feito o projecto completo de uma antena, se deseje fazer a verificação das suas características antes de se proceder à construção. A utilização de antenas-modelo é francamente de recomendar sempre que se estudem tipos «novos» de antena; pode ser o caso de antenas ainda não utilizadas ou também de antenas sobre as quais a informação disponível é muito limitada, como sucede frequentemente. Com efeito, ainda que tenha sido possível fazer o estudo teórico completo da «nova» antena, é de toda a conveniência fazer uma verificação experimental das conclusões obtidas, estudar experimentalmente a influência dos parâmetros da antena nas suas características e avaliar as tolerâncias a admitir na fixação desses parâmetros.

Sob o ponto de vista económico, se considerarmos que o custo das antenas reais em jogo pode ser da ordem das centenas ou dos milhares de contos e que a realização dos ensaios, com antenas-modelo, pode custar apenas alguns contos, concluimos que haverá todo o interesse em realizar esses ensaios ainda que se trate, apenas, de uma simples verificação de projecto.

A realização de ensaios com antenas-modelo tem ainda grande interesse sob o ponto de vista

educativo. Sobretudo quando se usem modelos em ondas centimétricas, podem realizar-se, no domínio de Laboratório, ensaios de muitos tipos de antenas. O interesse destes ensaios para o estudante é evidente, sobretudo porque, como se sabe, o estudo teórico de antenas, devido à sua complexidade matemática, é algumas vezes considerado árido pelos estudantes de feição prática mais acentuada.

2. Equivalência de dois sistemas electromagnéticos. Condições gerais

A realização de modelos, à escala, de antenas reais, em que se pretende manter a configuração geométrica das linhas de força dos campos eléctrico e magnético, é possível graças à linearidade das Equações de Maxwell do Electromagnetismo. Vamos ver, a partir destas equações, quais as condições a cumprir para se conseguir a equivalência de dois sistemas electromagnéticos que vamos designar, respectivamente, por sistema real e sistema modelo.

Consideremos que se trata de um modelo mecânico em que todas as dimensões lineares representam, numa certa escala, as dimensões correspondentes do sistema real. Representando por l um comprimento no sistema real e por l' o comprimento correspondente no modelo, diremos que

$$l' = K_l \cdot l \qquad (1)$$

sendo K_l a «escala de comprimento» do modelo. Se admitirmos que existem as «escalas» K_E para o campo eléctrico, K_H para o campo magnético, K_μ para a permeabilidade magnética, K_ε para a constante dieléctrica, K_σ para a condutibilidade e K_ω para a frequência, poderemos escrever

$$\vec{E'} = K_E \cdot \vec{E} \qquad (2)$$

$$\vec{H'} = K_H \cdot \vec{H} \qquad (3)$$

$$\mu' = K_\mu \cdot \mu \qquad (4)$$

$$\varepsilon' = K_\varepsilon \cdot \varepsilon \qquad (5)$$

$$\sigma' = K_\sigma \cdot \sigma \qquad (6)$$

$$\omega' = K_\omega \cdot \omega \qquad (7)$$

em que as letras «com linha» se referem ao modelo e as «sem linha» ao sistema real.

Tendo fixado estes factores de escala, vamos ver que ficam imediatamente definidos os factores de escala das outras grandezas de interesse no estudo do sistema.

Relativamente ao vector de Poynting, o factor de escala K_N, definido por

$$\vec{N'} = K_N \cdot \vec{N} \qquad (8)$$

será, em virtude da sua definição e das equações (2) e (3)

$$K_N = K_E \cdot K_H \qquad (9)$$

o que mostra que a relação das potências, que fluem através da unidade de área, respectivamente no modelo e no sistema real, é igual ao produto $K_E \cdot H_H$. A potência total fluindo através de uma dada superfície no sistema modelo será $K_E \cdot K_H \cdot K_l^2$ vezes a potência através da superfície correspondente no sistema real.

Como a tensão se pode definir como a circulação do campo eléctrico entre dois pontos, uma tensão V' no sistema modelo estará relacionada com a tensão V no sistema real, pela expressão

$$V' = K_E \cdot K_l \cdot V \,. \qquad (10)$$

As densidades de corrente $\vec{i'}$ e $\vec{i}$ nos dois sistemas estarão relacionadas pela seguinte expressão, que se deduz imediatamente da Lei do Circuito Magnético

$$\vec{i'} = \frac{K_H}{K_l} \vec{i} \,. \qquad (11)$$

As intensidades da corrente I' e I estarão relacionadas por

$$\frac{I'}{I} = \frac{K_H}{K_l} \cdot K_l^2 = K_H \cdot K_l \qquad (12)$$

como se conclui da equação (11).

As impedâncias Z' e Z estarão relacionadas pela equação

$$\frac{Z'}{Z} = \frac{K_E \cdot K_l}{K_H \cdot K_l} = \frac{K_E}{K_H} \qquad (13)$$

como se conclui das equações (10) e (12).

A directividade de uma antena, numa dada direcção, pode definir-se como o cociente entre a intensidade de radiação da antena segundo essa direcção e a intensidade de radiação média (ou seja a intensidade de radiação devida a um radiador isotrópico que radiasse a mesma potên-

cia). Ao cociente de intensidades de radiação podemos fazer corresponder o cociente de potências por unidade de área, a igual distância e, portanto, chamando P_u à potência fluindo através da unidade de área segundo a direcção dada, à distância r, e P_t a potência total radiada, a directividade da antena será

$$D = \frac{P_u}{\frac{P_t}{4 \cdot \pi \cdot r^2}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{P_u}{P_t} \quad (14)$$

No sistema modelo será

$$D' = 4 \cdot \pi \cdot r'^2 \cdot \frac{P'_u}{P'_t} \quad (15)$$

e, em virtude das equações (1) e (9), será

$$D' = 4 \cdot \pi \cdot K_l^2 \cdot r^2 \frac{K_E \cdot K_H \cdot P_u}{K_E \cdot K_H \cdot K_l^2 \cdot P_t} = D \quad (16)$$

o que nos mostra que a directividade da antena-modelo é a mesma, como aliás seria de esperar, que a da antena real.

Vamos agora determinar as relações que deverão existir entre os factores de escala definidos pelas equações (1) a (7) para que os dois sistemas sejam equivalentes.

Consideremos que se trata de campos variando harmònicamente em relação ao tempo e utilizemos a notação simbólica exponencial. Como sistema de unidades, vamos utilizar o sistema MKSC (*). E admitamos que se verificam as condições que nos permitem escrever as seguintes equações de Maxwell

$$\text{rot } \vec{E} = -j \cdot \omega \cdot \mu \cdot \vec{H} \quad (17)$$

$$\text{rot } \vec{H} = (\sigma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon) \cdot \vec{E} . \quad (18)$$

As equações de Maxwell aplicar-se-ão quer ao sistema real quer ao modelo e, seguindo a convenção estabelecida, as equações (17) e (18) considerar-se-ão como dizendo respeito ao sistema real; relativamente ao modelo, as equações correspondentes serão

$$\text{rot}' \vec{E}' = -j \cdot \omega' \cdot \mu' \cdot \vec{H}' \quad (19)$$

$$\text{rot}' \vec{H}' = (\sigma' + j \cdot \omega' \cdot \varepsilon') \cdot \vec{E}' \quad (20)$$

em que o símbolo rot' significa que as diferenciações implícitas neste operador são feitas na escala de comprimento do modelo; tendo este facto em consideração e em virtude das equações (2) a (7), as equações (19) e (20) podem transformar-se e tomar o aspecto

$$\frac{K_E}{K_l} \cdot \text{rot } \vec{E} = -j \cdot K_\omega \cdot K_\mu \cdot \omega \cdot \mu \cdot K_H \cdot \vec{H} \quad (21)$$

$$\frac{K_H}{K_l} \cdot \text{rot } \vec{H} = (K_\sigma \cdot \sigma + j K_\omega \cdot K_\varepsilon \cdot \omega \cdot \varepsilon \cdot) \cdot K_E \cdot \vec{E} . \quad (22)$$

Se compararmos as equações (21) e (22) com as equações (17) e (18), concluimos que deverão verificar-se as seguintes relações entre os factores de escala para que os dois sistemas sejam equivalentes sob o ponto de vista electromagnético

$$K_E = K_\omega \cdot K_\mu \cdot K_l \cdot K_H \quad (23)$$

$$K_H = K_\sigma \cdot K_l \cdot K_E \quad (24)$$

$$K_H = K_\omega \cdot K_\varepsilon \cdot K_l \cdot K_E \quad . \quad (25)$$

Quer dizer, para que o nosso modelo mecânico seja também um modelo sob o ponto de vista electromagnético, é preciso que se verifiquem as equações (23) a (25) entre os factores de escala em jogo.

3. Condições a que deve obedecer a antena modelo

Tendo em consideração que tanto a antena modelo como a antena real radiam no ar, convirá fixar, no que se refere aos factores de escala da constante dieléctrica e da permeabilidade magnética, valores unitários ou seja

$$K_\varepsilon = 1 \quad (26)$$

$$K_\mu = 1 \quad . \quad (27)$$

Considerando que a condutibilidade do ar é pràticamente nula, não temos que nos preocupar com a relação (6) no que se refere ao ar.

Relativamente aos outros materiais que compõem o sistema e, nomeadamente, ao condutor da antena, as condições (26) e (27) não oferecem dificuldades desde que se não usem materiais ferromagnéticos; se se trata de uma antena em cujas características de radiação o efeito de reflexão da «terra» é importante, já estas obrigam a que a «terra» no modelo tenha a mesma

(*) É, contudo, evidente que as conclusões obtidas são independentes do sistema de unidades adoptado.

constante dieléctrica e a mesma permeabilidade magnética que a «terra» na antena real.

Substituindo as condições (26) e (27) nas equações (23) e (25), conclui-se que deverá ser

$$\frac{K_E}{K_H} = 1 \quad . \qquad (28)$$

Apresenta-se agora o problema de ser ou não necessário estabelecer os valores de K_E e K_H. Se quisermos ter em consideração as potências, as tensões e as correntes postas em jogo, é evidente que será necessário estabelecê-los. Se, contudo, nos interessarem apenas considerações de impedância e de directividade, bastará fixar a sua relação, pela equação (28).

Das equações (24), (25) e (28) conclui-se que deverá ser

$$K_\omega \, . \, K_l = 1 \qquad (29)$$

$$K_\sigma \, . \, K_l = 1 \quad . \qquad (30)$$

A condição (29) é fácil de realizar e significa que a escala da frequência deve ser inversa da do comprimento ou seja que as escalas do comprimento de onda e dos comprimentos físicos devem ser iguais. Isto quer dizer que, expressas em unidades de comprimento de onda, as dimensões da antena real e da antena modelo devem ser idênticas; de resto, sabe-se da teoria de antenas que os diagramas de radiação de antenas formadas por condutores perfeitos, situados no espaço livre, dependem apenas das relações das suas dimensões físicas para o comprimento de onda.

A condição (30) representa, contudo, uma grande dificuldade. Com efeito, se, por exemplo, o modelo mecânico estiver na escala de $K_l = 1/100$, isso quer dizer que terá de ser $\sigma' = 100\,\sigma$ isto é que as condutibilidades dos meios existentes no modelo deverão ser 100 vezes superiores às dos meios correspondentes no sistema real. E, se os condutores da antena real forem, como é habitual, de cobre (*) isso significa que os condutores da antena modelo deveriam ser de um material cuja condutibilidade fosse 100 vezes melhor que a do cobre. E, como se sabe, dos metais só a prata tem melhor, mas pouco melhor, condutibilidade que o cobre. No que se refere aos isoladores e ao ar que envolve a antena, a condição (30) não oferece dificuldade pois que a condutibilidade desses meios é pràticamente nula. Relativamente ao terreno, quando este tenha papel preponderante no funcionamento da antena, também haverá que utilizar um «plano de terra» de um material que obedeça simultâneamente às condições (26), (27) e (30) o que será, evidentemente, difícil.

Na prática, é frequente desprezar a condição (30) dentro do critério simplista de os meios do sistema ou serem isoladores perfeitos (e portanto $\sigma = 0$) ou condutores perfeitos (e portanto $\sigma = \infty$). É, contudo, evidente o perigo de adoptar este critério sem se tomarem as devidas precauções.

4. Aspectos práticos do problema. Conclusões

O não cumprimento da relação de condutibilidade a que nos referimos poderá ter ou não uma influência importante nas conclusões a obter, conforme o problema em investigação e conforme o tipo de antena em estudo.

Essa influência poderá ser mais fàcilmente apreciada se considerarmos que uma antena-modelo de condutores de cobre, n vezes mais pequena que a antena real, é equivalente a esta quando os condutores da antena real forem de um material de condutibilidade n vezes inferior à do cobre. Em geral, a utilização de modelos tem interesse para representar antenas de grandes dimensões, para ondas decamétricas ou maiores. E, como os modelos trabalham, frequentemente, em ondas métricas, decimétricas e centimétricas, os factores de escala vão, em casos correntes, desde 1/10 até 1/500 e as antenas modelos serão equivalentes a antenas reais fictícias com condutores de resistividade 10 a 500 vezes superior à dos condutores do modelo. Talvez seja de interesse notar que a resistividade do aço inoxidável (com elevada percentagem de crómio e níquel) que se usa em linhas dissipativas em antenas de ondas decamétricas (como, por exemplo, na terminação de antenas rômbicas) tem uma resistividade de 40 a 50 vezes a do cobre; e que, dos metais e suas ligas, de mais corrente utilização, os materiais mais resistivos são as ligas de crómio e níquel cuja resistividade é da ordem de 65 vezes a do cobre.

(*) Em Radiodifusão em onda média utilizam-se, frequentemente, radiadores de ferro; este caso não está, contudo, abrangido nas considerações de ordem prática feitas neste artigo. A utilização de materiais ferro-magnéticos é também excluída quando se admite a linearidade das equações diferenciais de Maxwell (17) a (20).

Os tipos de antenas usados mais frequentemente em ondas decamétricas ou maiores podem dividir-se em *antenas com onda progressiva* de corrente e *antenas com onda estacionária*; haverá, evidentemente, ainda o caso de antenas cuja distribuição de corrente se pode considerar a soma de uma onda progressiva e uma onda estacionária. Como exemplos de antenas com onda progressiva, citamos a antena rômbica terminada e os agregados de antenas rômbicas. Como exemplos de antenas com onda estacionária, podemos mencionar as antenas lineares formadas por condutores, não terminados, alimentadas a meio ou na extremidade e os agregados destes condutores tais como, por exemplo, as cortinas de dipolos e a antena tipo «V», sem terminação. As antenas com onda progressiva têm, em geral, um diagrama de radiação assimétrico em relação ao plano normal ao eixo de radiação de antena, com uma radiação muito mais acentuada «à frente» que «à rectaguarda» da antena. As antenas com onda estacionária, em distribuição sinusoidal perfeita, têm um diagrama de radiação simétrico em relação a esse plano. Por exemplo, uma antena rômbica convenientemente «terminada» é essencialmente unidireccional e, na prática, a relação dos sinais à frente e à rectaguarda é bastante elevada e da ordem de 20 ou mais. Numa antena «V», sem terminação, com condutores lineares perfeitos, a radiação é teòricamente idêntica à frente e à rectaguarda, embora pràticamente, em ondas decamétricas, seja ligeiramente superior à frente que à rectaguarda devido às perdas por atenuação nos condutores e por radiação; essa perda significa que, em vez de ter só uma onda estacionária pura que produziria um diagrama simétrico, temos de considerar uma distribuição de corrente que é de certo modo equivalente à sobreposição de uma onda progressiva que é responsável pela assimetria verificada na prática.

A distribuição da corrente nos condutores das antenas com onda progressiva é análoga à que se verifica numa linha de transmissão terminada pela sua impedância característica; a variação do valor eficaz da corrente ao longo da linha segue uma lei exponencial que depende da atenuação na linha, como se representa na fig. 1.

As antenas com onda estacionária têm uma distribuição de corrente análoga à que se verifica numa linha de transmissão em circuito aberto; quando a atenuação é nula, a distribuição é sinusoidal; quando, contudo, a atenuação é elevada, a lei de distribuição toma a forma clássica repre-

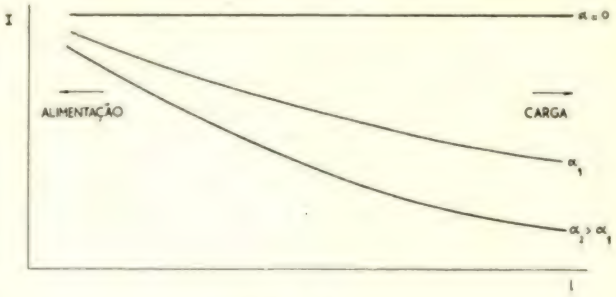


Fig. 1

sentada na fig. 2; a onda progressiva incidente é fortemente atenuada e por isso a sua amplitude no extremo em aberto é já pequena; com um coeficiente de reflexão unitário, a onda reflectida começa já com pequena amplitude e, devido à atenuação, extingue-se ràpidamente.

Por isso, a partir da região onde a onda reflectida começa a ser desprezável, a distribuição da corrente aproxima-se da que existiria se a linha fosse terminada por uma impedância igual à impedância característica. Em realidade, numa linha fortemente dissipativa, a lei de distribuição

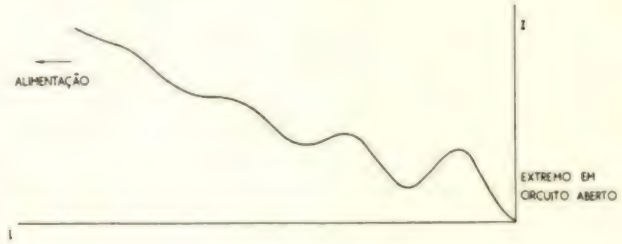


Fig. 2

de corrente é relativamente pouco dependente das condições de terminação da linha.

Vimos que os modelos reduzidos são equivalentes a sistemas reais fictícios onde as condutibilidades são muito menores e portanto as atenuações são muito mais elevadas do que nos casos reais em jogo. E, *para se fazer o estudo rigoroso da influência desta condição num certo tipo de antena, haverá que estudar o seu comportamento em função da condutibilidade dos materiais empregados e da atenuação das correntes em jogo.* A analogia apontada permite-nos, contudo, como vamos ver, tirar conclusões de ordem genérica com interesse prático.

Com efeito, nas antenas com onda progressiva, um aumento de atenuação conduz a um enfraquecimento mais rápido da corrente ao longo do condutor da antena na direcção da alimentação para a carga; mas o andamento da curva de variação mantém-se. Nas antenas com onda estacionária, um aumento pronunciado da atenuação conduz a uma alteração mais profunda no andamento da curva de variação da corrente ao longo do condutor da antena e, como vimos, esta lei de variação aproxima-se da que se nota no caso da onda progressiva.

Do que atrás se expõe, podem tirar-se algumas conclusões genéricas importantes, relativamente à influência da escala de condutibilidade no comportamento de modelos reduzidos, em comparação com os sistemas reais:

A) *A lei de variação da corrente nos condutores da antena é relativamente menos alterada no caso de antenas com onda progressiva do que no caso de antenas com onda estacionária.*

B) *A alteração verificada na lei de variação da corrente nas antenas com onda estacionária tende a tornar esta semelhante à que se encontra nas antenas com onda progressiva.*

Tendo em consideração que as características de radiação de uma antena dependem bàsicamente da lei de distribuição da corrente nos seus condutores, será de esperar, no que se refere aos diagramas de radiação, que

C) *Os modelos reduzidos de antenas sejam relativamente mais fiéis aos sistemas reais correspondentes no caso de antenas com onda progressiva do que no caso de antenas com onda estacionária.*

D) *Os diagramas de radiação dos modelos reduzidos de antenas com onda estacionária tendam a parecer-se com os diagramas das antenas correspondentes com onda progressiva.*

Da experiência do autor na utilização de modelos, conclui-se ainda que

E) *No caso de antenas rômbicas e agregados de antenas rômbicas, modelos reduzidos nas escalas de 1/10 a 1/30 apresentam diagramas de radiação cujos lobos principais coincidem pràticamente com os valores calculados para as antenas reais.*

F) *No caso de antenas lineares sem terminação, tais como a antena linear de um só condutor com alimentação assimétrica, a antena tipo «V» e a antena rômbica sem terminação, o diagrama de radiação dos modelos reduzidos em escalas de 1/10 ou com maior redução é apreciàvelmente afectado, tendendo a radiar mais energia à frente que à rectaguarda da antena, como é típico das antenas com onda progressiva.*

Como ilustração das conclusões apontadas vamos citar os seguintes exemplos:

Exemplo 1 — Antena formada por um agregado de duas antenas rômbicas sobrepostas, ali-

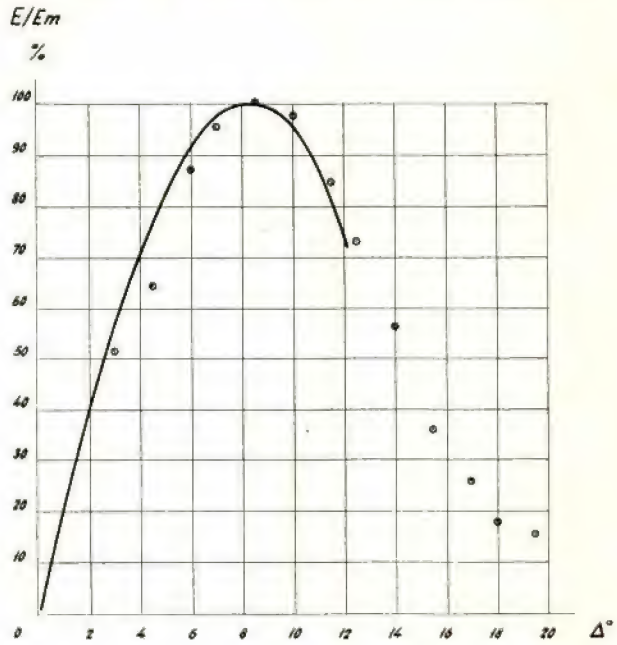


Fig. 3

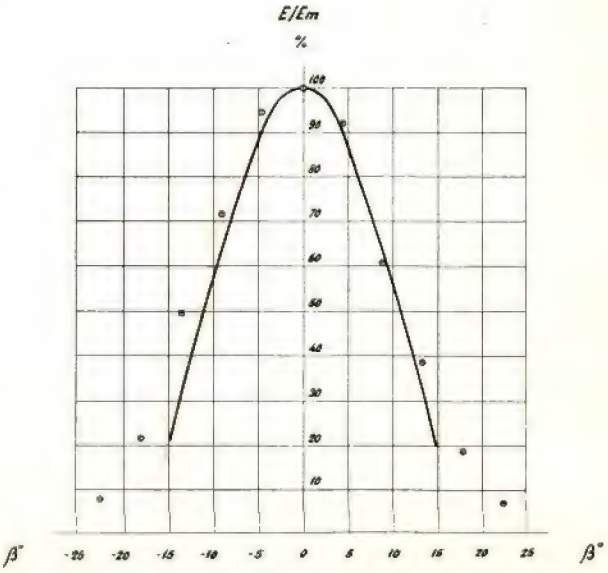


Fig. 4

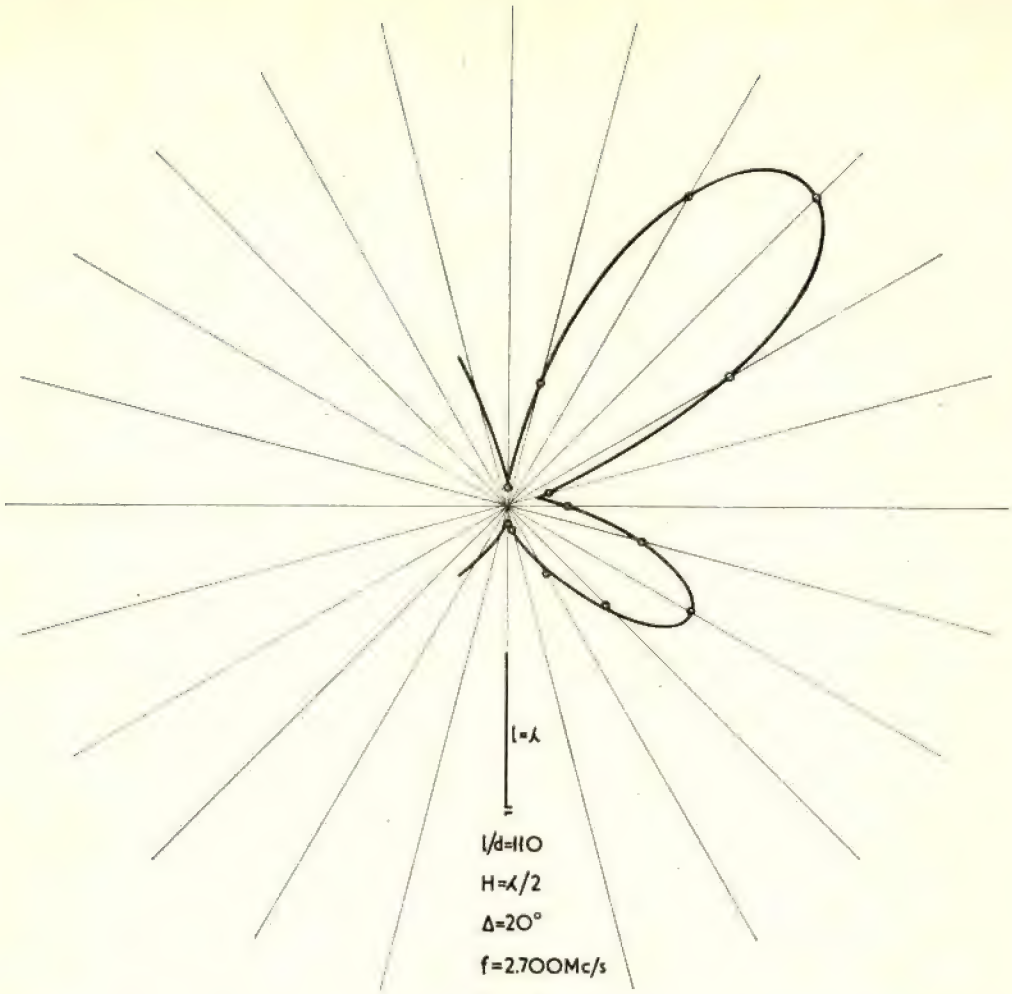


Fig. 5

mentadas em paralelo e com terminação independente. A antena real destina-se a radiodifusão em onda curta, com emissores de 100 kW.

Nas figs. 3 e 4 representam-se, respectivamente, os diagramas de radiação vertical e horizontal (este medido para um ângulo de elevação determinado) calculados, para uma certa frequência (11 Mc/s). Os pontos marcados referem-se a medidas feitas numa antena modelo na escala 1/15 e seguem, com notável aproximação, os diagramas calculados teòricamente.

Exemplo 2 — Antena idêntica à anterior com e sem terminação.

Ensaios feitos com uma antena semelhante à anterior nos dois casos de *a*) as antenas estarem convenientemente terminadas e *b*) as antenas não terem terminação, mostraram que os lobos principais de radiação, nos modelos reduzidos, eram pràticamente idênticos; a relação dos sinais à frente e à rectaguarda era, respectivamente, de 40 e de 20. Este exemplo concreto ilustra bem as conclusões apontadas.

Exemplo 3 (*) — Antena formada por um condutor, cilíndrico, de cobre, alimentado na extremidade, paralelo ao «plano de terra» (constituído por uma chapa de alumínio), a uma altura H igual a $\frac{\lambda}{2}$. As condições de ensaio indicam-se na fig. 5 onde se representa o diagrama horizontal de radiação, medido para um ângulo de elevação Δ igual a 20°.

O ensaio foi feito na frequência de 2700 Mc/s e é evidente que, pelas razões apontadas, se não

(*) As medidas referidas nos exemplos 3 a 5 foram realizadas com a cooperação do Eng.º Pedro Correia Sampaio, Bolseiro do Instituto de Alta Cultura.

pode generalizar este diagrama para frequências, digamos, de ondas decamétricas. Neste exemplo, a relação do comprimento do lado l para o diâmetro d do condutor da antena tem, também, uma influência apreciável no diagrama. O diagrama teórico de uma antena linear, deste tipo, com distribuição sinusoidal, é simétrico em relação ao plano transversal da antena.

Exemplo 4 (*) — Antena tipo «V», sem terminação, com abertura igual a 90°, lado l igual a λ, altura H em relação ao «plano de terra» igual a $\frac{\lambda}{2}$. As condições do ensaio indicam-se na fig. 6 onde se representa o diagrama horizontal de radiação, medido para um ângulo de elevação Δ igual a 20°.

Também, neste caso, a relação $\frac{l}{d}$ terá influência no diagrama obtido.

O diagrama teórico de uma antena linear, deste tipo, com distribuição sinusoidal, tem lobos principais idênticos à frente e à rectaguarda da antena. A assimetria notada no ensaio feito ilustra também as conclusões apresentadas.

Exemplo 5 (*) — Antena idêntica à do exemplo anterior mas com lado l igual a $\frac{\lambda}{2}$ e relação $\frac{l}{d}$ mais pequena. As condições de ensaio indicam-se na fig. 7 onde se representa o diagrama horizontal de radiação, também medido para Δ igual a 20°.

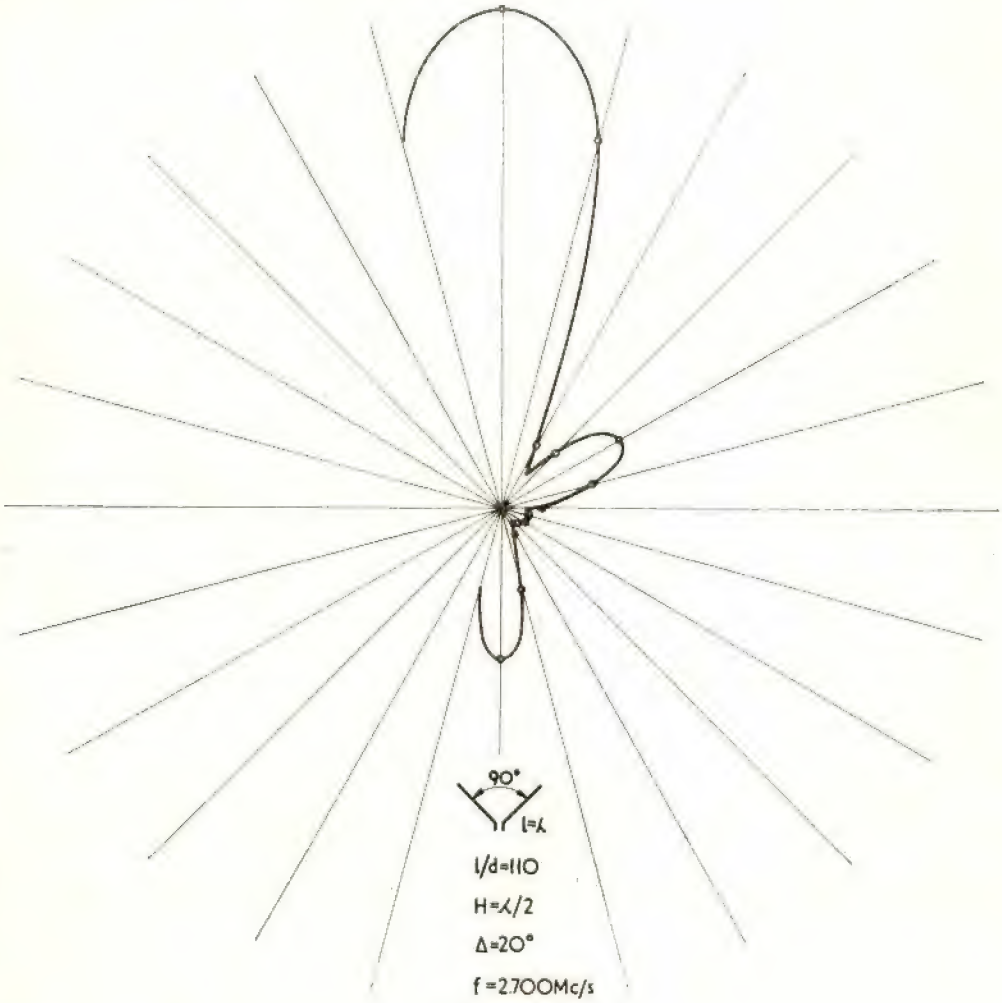


Fig. 6

Também neste caso se nota uma assimetria muito pronunciada.

Os exemplos típicos referidos ilustram, nìtidamente, as conclusões genéricas apresentadas neste trabalho. Este assunto é, contudo, susceptível de

ser investigado em muito mais pormenor e merece que o seja, em virtude do interesse, cada vez maior, verificado na utilização de antenas-modelo e da «despreocupação» com que o problema é, frequentemente, apresentado na literatura e tratado na prática profissional.

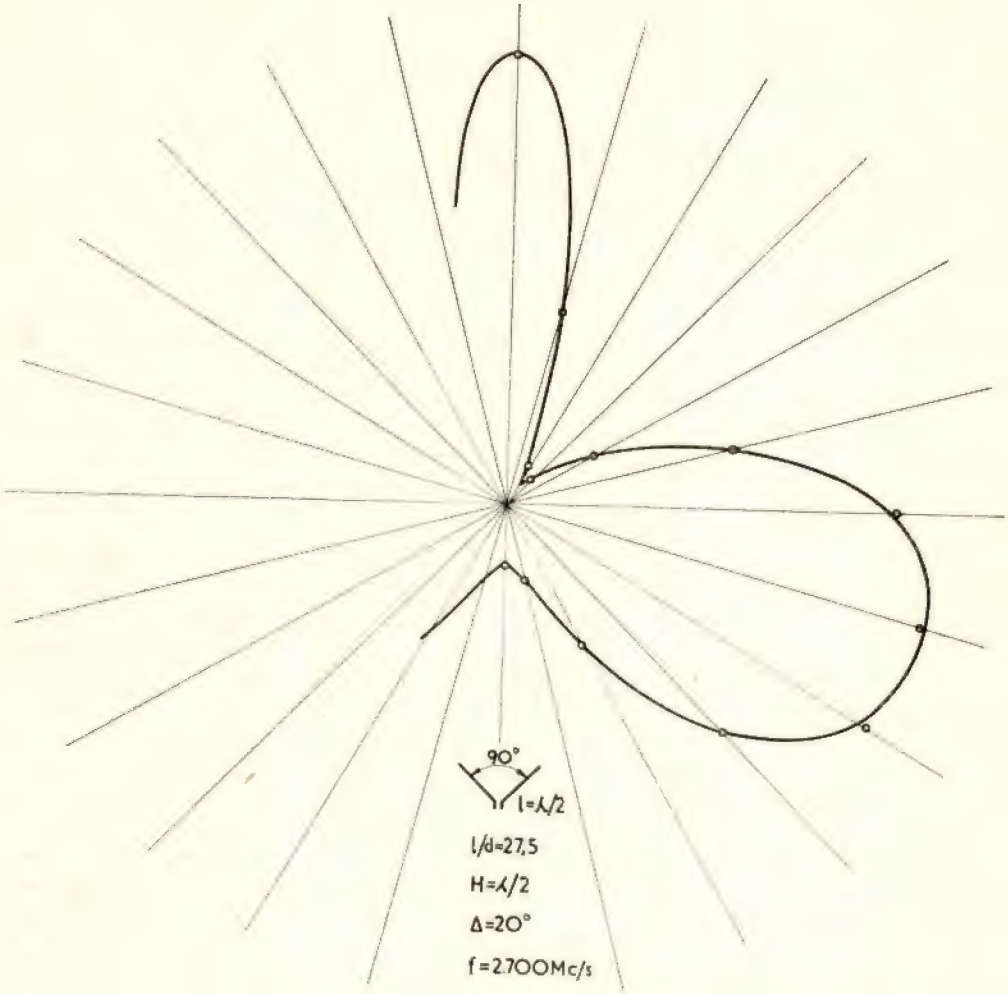


Fig. 7

Bibliografia

1 — J. Aharoni, «Antennae, an introduction to their theory», Oxford Clarendon Press, 1946.

2 — J. D. Kraus, «Antenas», Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1950.

3 — E. A. Laport, «Radio Antenna Engineering», Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1952.

4 — S. A. Schelkunoff and H. T. Friis, «Antennas, Theory and Practice», John Wiley & Sons, Inc., 1952.

5 — S. Silver, «Microwave Antenna Theory and Design», Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1949.

6 — Staff of the Radio Research Laboratory Harvard University, «Very High-Frequency Techniques», Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1947.

7 — F. E. Terman, «Radio Engineering», Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1947.

C. D. 621.311.5/91

Elementos sobre a produção e o consumo de energia na rede eléctrica nacional

— Elementos extraídos das estatísticas mensais do Repartidor Nacional de Cargas (R. N. C.) preparadas nos Serviços do R. N. C. a cargo da Companhia Nacional de Electricidade —

NOTA: *A produção e o consumo da rede das empresas do R. N. C. representam actualmente cerca de 90 % dos respectivos totais do País.*

FEVEREIRO

I — Elementos gerais

a) Mensais (mês de Fevereiro) 10^6 kWh

	1953	1954	Variação %
Produção hidráulica (P_h)	113,3	123,0 (2)	+ 9
Produção térmica (P_t) . .	2,2	3,0 (3)	+ 36
Produção total (P_T) . . .	115,5	126,0	+ 9
Cons. electroquímico (C_{eq})	26,2	22,3	— 15
Outros consumos ($C_T - C_{eq}$)	75,9	85,3	+ 12
Consumo total (C_T) (1) . .	102,1	107,6	+ 5

b) Acumulados (desde o início do ano, isto é, de 1 de Janeiro a 28 de Fevereiro) 10^6 kWh

	1953	1954	Variação %
Produção hidráulica (P_h)	238,0	255,6 (4)	+ 7
Produção térmica (P_t) . .	7,1	8,6 (5)	+ 21
Produção total (P_T) . . .	245,1	264,2	+ 8
Cons. electroquímico (C_{eq})	54,7	48,6	— 11
Outros consumos ($C_T - C_{eq}$)	160,4	178,9	+ 12
Consumo total (C_T) (1) . .	215,1	227,5	+ 6

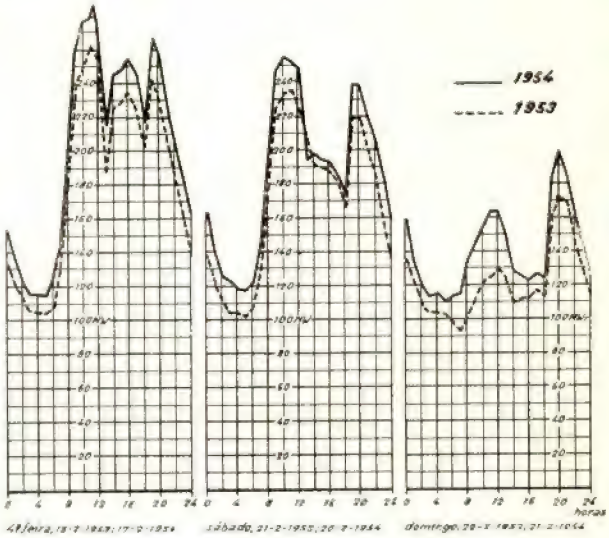
Notas:

(1) No consumo total (C_T) estão incluídas as perdas nas redes de transporte e distribuição.

(2) 98 % P_T. (3) 2 % P_T. (4) 97 % P_T. (5) 3 % P_T

II — Diagramas de carga da produção

	4.ª feira: 18-2-953; 17-2-954	
	1953	1954
Produção hidráulica (P_h) — MWh	4.447	4.798
Produção térmica (P_t) — MWh . .	36	39
Produção total (P_T) — MWh . . .	4.483	4.837
Utilização da ponta (U) — horas	17,1	17,0
Factor de carga (α)	0,71	0,71
Relação $\frac{\text{Pot. min.}}{\text{Pot. máx.}}$ (r)	0,40	0,40



III — Energia armazenada nas principais albufeiras no no fim do mês de Fevereiro de 1954

Albufeira	Energia armazenada	
	10^6 kWh	%
Venda Nova	58,2	51,5
Salamonde	6,0	44,0
Guilhofrei	4,0	48,1
Lagoa Comprida	19,8	66,9
Santa Luzia	22,3	65,7
Castelo do Bode	118,2	72,0
Pracana	2,5	24,3
Póvoa	5,3	39,8
Total	236,3	61,6

Nota:

(1) Coeficiente de enchimento em energia das albufeiras.

C. D. 624.041.2

O MÉTODO DE RELAXAÇÃO

SUA APLICAÇÃO AOS RETICULADOS CONTÍNUOS

PELO ENG.º CIVIL (U. P.) JOÃO ARAÚJO SOBREIRA

Um sistema contínuo caracteriza-se pela possibilidade que têm os seus elementos de poderem trabalhar não só por acção de esforços longitudinais, mas também por corte e por flexão; o seu grau de hiperestaticidade é sempre muito superior ao que o mesmo sistema apresentaria se lhe fossem introduzidas articulações nos nós. Tem, por consequência, muito interesse a utilização de métodos aproximados para o cálculo dos sistemas contínuos; pode mesmo afirmar-se que estes, àparte os muito simples, só começaram a ser calculados, com rigor aceitável, principalmente depois do aparecimento e generalização do método de Cross.

Os reticulados contínuos são hoje quase exclusivamente calculados pelo método de Cross; e dizemos quase, para não esquecer os casos elementares apresentados nos formulários ou manuais correntes e ainda para ressalvar aqueles poucos casos em que o método da relaxação foi utilizado. O objectivo deste trabalho é mostrar que este último método deve ser mais largamente usado, pois a sua aplicação reveste-se, por vezes, de aspectos bastante mais favoráveis que o método de Cross.

E achamos que, desde já, devemos mencionar alguns destes aspectos, que serão concretizados mais adiante, em exemplos completamente resolvidos.

Chamamos a atenção, em primeiro lugar para o facto do método de relaxação nos fornecer inicialmente o valor das deformações (translações e rotações), elementos fundamentais para se conhecer exactamente o trabalho da estrutura deformada.

Este conhecimento é do maior interesse e nunca será por demais exaltado, pois ele permitir-nos-á «sentir» o trabalho da estrutura que projectamos e «auscultando-a», distribuir convenientemente as rigidez relativas dos seus elementos. Permitir-nos-á, com a máxima economia, adaptar a estrutura à utilização que vai ter e às condições exteriores em que se situa. Conseguir-se-á, por exemplo, uma melhor distribuição do trabalho de conjunto por todos os elementos resistentes da estrutura, a eliminação de rotações que convenha não transmitir às fundações, a redução de deformações exageradas, etc. O conhecimento, por assim dizer obrigatório, que o engenheiro terá das deformações das estruturas que calcula, leva-lo-á a aperfeiçoar-se no sentido de mais econòmicamente as projectar.

O conhecimento numérico das deformações é, na verdade, uma grande vantagem que só o método da relaxação apresenta na sequência da sua aplicação.

Depois desta vantagem outra se indica: a verificação permanente de todas as operações feitas.

É evidente o interesse que existe na possibilidade de se poderem verificar todos os cálculos, à medida que vão sendo feitos. Ora este método permite efectuar várias verificações possíveis e fáceis das sucessivas fases do seu desenvolvimento. Só se passa à operação seguinte quando a verificação da anterior não acusar qualquer erro.

A segurança de cálculo é total: tanto os momentos como os esforços transversos finais são obtidos separadamente uns dos outros e, por consequência, basta que se verifique o equilíbrio entre eles, para termos a certeza de que a estrutura está correctamente calculada.

Ainda dentro de este aspecto, há outra característica a mencionar: se, na operação fundamental, designada por «operação de relaxação», se tiver cometido qualquer erro de contas, acusado na verificação respectiva, isso não obrigará à sua procura; bastará partir dos valores que a verificação fornece, conforme se exemplificará num dos exemplos da segunda parte deste trabalho.

Isto mesmo nos indica outro aspecto importante da relaxação: o poder-se partir de uma solução aproximada que a nossa experiência e prática nos permite defenir, para, relaxando a partir dela, obtermos a solução exacta. Fàcilmente se

compreende a economia de trabalho que isto nos pode dar.

Outra vantagem será a eliminação de qualquer confusão na atribuição de sinais às deformações ou às solicitações, exteriores ou interiores. A convenção única de sinais é estabelecida inicialmente, e mantida em todo o cálculo dos sistemas contínuos, pelas fórmulas que apresentaremos, expressas em função do valor absoluto das grandezas de que dependem.

Mas, pode perguntar-se, não serão estas vantagens eliminadas pela morosidade ou confusão na aplicação do método ao cálculo de reticulados contínuos? Assim não acontece e antes pelo contrário, a sua aplicação a sistemas de certa importância (assimétrico e com deslocamentos laterais) é mais prática que a do método de Cross.

A hipótese que se admite da incompressibilidade prática dos elementos de betão armado, permitiu-nos realizar uma sistematização de fórmulas que torna o método muito simples em quase toda a sua aplicação. Apenas se deixa à intuição e bom conhecimento da deformação das estruturas que o engenheiro deve possuir, a maior ou menor rapidez na execução da «operação de relaxação».

Supomos ter evidenciado o suficiente para que os engenheiros se interessem pelo conhecimento deste método; ele lhes permitirá projectar fàcilmente as suas estruturas com maior economia, resultante de um mais correcto dimencionamento das secções dos seus elementos.

Torna-se necessário que o engenheiro se apetreche tècnicamente cada vez mais e aplique os seus conhecimentos de modo a inspirar a confiança indispensável àqueles que lhe confiam as suas obras. Só assim o engenheiro verá os seus serviços requisitados e apreciados, pois ele mostrará que sabe projectar e realizar obras mais bem concebidas e económicas do que quaisquer outros o farão.

É bem certo que regulamentações desactualizadas em relação aos conhecimentos modernos dos materiais, desencorajam o engenheiro de tirar todo o rendimento económico possível do seu projecto.

Elas impedem-no de usar seguranças inferiores às que estipulam (em geral com base em técnicas menos perfeitas), apesar de o engenheiro ter a consciência de que o poderá fazer, pois sabe o cuidado que teve, e terá, na concepção e rigor dos cálculos, no controle e qualidade do fabrico dos materiais, na execução e fiscalização da obra.

Torna-se necessário que se autorize e anime o engenheiro a calcular e dimensionar segundo as técnicas mais actualizadas e comprovadas, pois só assim ele poderá ser verdadeiramente útil e criará o estímulo necessário ao seu aperfeiçoamento técnico.

Feitas estas considerações de carácter geral, vejamos agora a matéria contida neste trabalho. Este será apresentado em duas partes.

Na primeira parte, fazemos a aplicação da teoria da relaxação ao cálculo dos sistemas articulados hiperestáticos. Além do seu interesse próprio como método de cálculo, servirá principalmente para iniciação e prática do método de relaxação, o que permite uma mais fácil compreensão da sua aplicação ao cálculo dos reticulados contínuos feita a seguir, na segunda parte.

1.ª PARTE

O método de relaxação no cálculo de estruturas articuladas hiperestáticas

1 — Uma estrutura articulada é teòricamente, como se sabe, um sistema de barras ligadas pelos extremos de forma tal que nelas se instalem apenas esforços longitudinais, de tracção ou compressão. Os seus elementos são dimensionados atendendo só ao trabalho de deformação longitudinal que cada um terá de desenvolver para, no conjunto, equilibrarem as acções exteteriores.

Mas todos também sabemos que muitas das estruturas, tanto metálicas como de madeira, são construídas de tal modo que se aproximam muito mais das estruturas contínuas, do que das estruturas articuladas como, por hipótese, são consideradas nos respectivos cálculos.

Também ainda se sabe ser condição essencial da técnica, construir de forma a que os elementos resistentes trabalhem tal como foram previstos pelo projectista. Este, por sua vez, também deverá ter sempre presente o método de construção. Só assim as hipóteses de cálculo serão realidade, e este terá realmente servido para alguma coisa.

É então altura de perguntar-se qual o interesse que existirá no conhecimento de um novo método de cálculo de estruturas articuladas (além do que se lhe reconhece como introdução ao método do

cálculo das estruturas contínuas) numa época em que a soldadura eléctrica e, por consequência, a rigidez dos nós, se generalizam cada vez mais. O indicado será, parece, calculá-las como estruturas contínuas ou ensaiá-las em modelo reduzido, abandonando-se definitivamente o cálculo baseado na hipótese de articulação pura dos nós. Infelizmente o segundo processo nem sempre está ao nosso alcance, nem de acordo com a importância da estrutura que pretendemos calcular; aliás é sempre vantajoso introduzir as indicações experimentais num método analítico, pois só assim podemos, sem encarecer extraordinàriamente o ensaio, considerar todas as diversas solicitações que actuam na estrutura.

Por sua vez o método analítico das estruturas contínuas, teòricamente viável para todas as hipóteses, só em casos relativamente simples terá aplicação prática; será, no entanto, o único método não experimental aplicável em estruturas importantes de elementos metálicos soldados, com rigidez elevadas.

De facto, e devido às concentrações de tensões que todas as irregularidades de secção e aumentos de rigidez dos nós produzem, não se podem então admitir aqueles fenómenos locais tais como: pequenos esmagamentos dos furos de rebites; deformações plásticas localizadas nas secções junto aos nós; rotações facilitadas pelas rigidez relativas dos diferentes elementos concorrentes num só; tudo aquilo, enfim, que, ponderado, torna aproximada da realidade a hipótese da articulação que o projectista introduziu nos seus cálculos.

É à ductilidade do aço e à adaptação local da madeira que se deve ir buscar a razão do exito construtivo que até hoje têm tido as estruturas calculadas como articuladas. E é devido àquelas importantes propriedades que o conhecimento de um método expedito de cálculo de estruturas hiperestáticas articuladas será uma boa ferramenta de cálculo de um grande número de estruturas, tais como, por exemplo, existem no estaleiro de uma grande obra.

A boa compreensão do emprego da relaxação a estes sistemas, permitirá um mais fácil manejo do método em outras aplicações, como no cálculo dos sistemas contínuos, resolução de sistemas de equações e de equações diferenciais, problemas de elasticidade, física, termodinâmica, etc.

Considera-se, por tudo isto, suficientemente justificada a divulgação, que passamos a fazer, do método de relaxação no cálculo das estruturas hiperestáticas articuladas.

2 — O método da relaxação é um método de aproximações sucessivas, baseado no facto de ser sempre possível conhecer o erro que uma dada hipótese de solução particular introduz num problema devidamente equacionado. A questão limita-se então, muito simplesmente, a reduzir este erro a um valor que se considere desprezável. Isto, porém, é impossível de conseguir sem a utilização de regras adequadas; o método de relaxação não é, na sua essência, mais do que o estabelecimento de essas regras.

3 — O método, criado há pouco mais de uma quinzena de anos pelo Prof. Southwell, da Universidade de Cambridge, teve a sua origem na dificuldade de cálculo dos sistemas articulados hiperestáticos, só resolúveis até então através do método geral de cálculo baseado no trabalho elástico de deformação e, portanto, esbarrando sempre com o enorme entrave que representava a resolução de um sistema de elevado número de equações. Não existia, para este tipo de estruturas, um método semelhante ao do Prof. H. Cross relativo aos sistemas contínuos, já então bastante conhecido e utilizado. Hoje o método de Cross pode ser considerado um caso particular do método da relaxação.

4 — Como resolveu, então, Southwell o problema das aproximações sucessivas nos sistemas articulados?

Imagine-se que se aplica a cada nó, e antes da estrutura ser carregada, um sistema de sujeições, de forma a estas suportarem, por si só, as forças exteriores, depois de aplicadas; impede-se assim que a estrutura sofra qualquer deformação, apesar de solicitada (1).

Mantendo fixas todas as sujeições, menos uma, suponha-se que se *relaxava* esta, isto é, se permitia o deslocamento parcial do nó respectivo em determinada direcção; a força exterior nele aplicada realiza um trabalho.

---

(1) Um tal sistema de sujeições pode ser, por exemplo, imposto por um conjunto de macacos helicoidais, aplicados em grupos de três a cada nó e orientados segundo as direcções coordenadas.

Acontece então que as barras ligadas a este nó sofrem deformações e transmitem às sujeições estabelecidas nos nós adjacentes, esforços que vão modificar o valor das forças nelas actuantes; ao mesmo tempo, o trabalho da força exterior aplicada ao nó cuja sujeição foi relaxada, é transformado em trabalho interno de deformação das barras que concorrem nesse nó. E quando, depois de ter actuado sucessivamente sobre todas as sujeições, e tantas vezes quantas as necessárias, se tiver conseguido anular as suas *forças residuais* (1), isto é, transformado todo o trabalho exterior em trabalho interno, é que, então, só a estrutura resiste. Conheceremos, no fim, as relaxações totais que foi necessário dar às sujeições e portanto as deformações, ou melhor, os esforços instalados nas barras.

5 — Resta, depois de encarado fìsicamente o problema, tratá-lo analìticamente. A primeira coisa a conseguir é o equacionamento do problema, isto é, o estabelecimento de relações entre a força residual e o deslocamento dos nós que a influenciam. É o que Southwell designou por *problema unitário*. Isso permitirá conhecer qual o efeito produzido pela relaxação de uma certa sujeição sobre as sujeições adjacentes; donde, pelo princípio da igualdade de acção e reacção, qual o efeito que a relaxação (por ex.-unitária) de uma determinada sujeição introduz na sua própria força residual. Este efeito é o chamado *factor de operação* do nó considerado.

São estes coeficientes que, multiplicados convenientemente, permitirão à relaxação anular as forças residuais e assim realizar a aproximação final procurada.

6 — Da fig. 1 tira-se que o esforço P_{MF} na barra MF devido às deformações U, V, é:

$$P_{MF} = E\Omega \frac{\Delta L}{L} = \frac{E\Omega}{L}(U \cos\alpha + V \operatorname{sen}\alpha) =$$

$$= \frac{E\Omega}{L}\left(U \frac{\Delta x}{L} + V \frac{\Delta y}{L}\right) =$$

$$= \frac{E\Omega}{L^2}(U\Delta x + V\Delta y) = L\rho_{MF}(U\Delta x + V\Delta y)$$

(1) A força residual é, assim, a força que, num dado instante, uma sujeição suporta.

É também fácil deduzir que o esforço longitudinal de uma barra MF de um sistema articulado no espaço está relacionado com as componentes U, V, W do deslocamento de um dos seus nós, pela expressão:

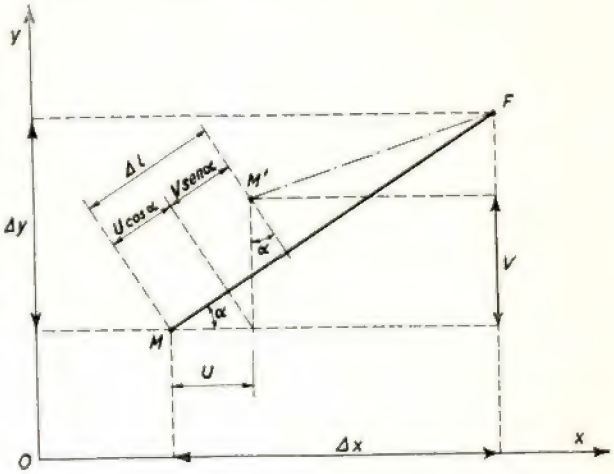


Fig. 1

$$P_{MF} = L\rho_{MF}(U\Delta x + V\Delta y + W\Delta z) \text{ em que:}$$

$$\rho_{MF} = \frac{E\Omega}{L^3}\ ;\ \Delta x = x_M - x_F\ ;\ \Delta y = y_M - y_F\ ;$$

$$\Delta z = z_M - z_F$$

sendo:

E, o módulo de elasticidade do material

L, Ω, o comprimento e a secção da barra $\overline{MF}$

x_M, y_M, z_M e x_F, y_F, z_F as coordenadas iniciais dos extremos da barra.

As componentes X_M, Y_M, Z_M e X_F, Y_F, Z_F, em relação a um sistema de eixos coordenados tomado para referência, dos esforços exercidos pela barra MF sobre as sujeições dos nós M e F, em consequência das relaxações U, V, W, impostas em M, mantendo-se fixo o nó F, serão:

$$-X_M = X_F = \rho_{MF}(\Delta x^2 \cdot U + \Delta x \cdot \Delta y \cdot V + \Delta x \cdot \Delta z \cdot W)$$

$$-Y_M = Y_F = \rho_{MF}(\Delta y \cdot \Delta x \cdot U + \Delta y^2 \cdot V + \Delta y \cdot \Delta z \cdot W)$$

$$-Z_M = Z_F = \rho_{MF}(\Delta z \cdot \Delta x \cdot U + \Delta z \cdot \Delta y \cdot V + \Delta z^2 \cdot W)$$

Estas são as relações que equacionam o problema. Delas poderiamos obter os factores de operação. Consegue-se porém uma melhor sistematização dos cálculos se estes factores forem obtidos através dos chamados *coeficientes de influência*.

7 — Estes coeficientes são as componentes dos esforços, segundo os eixos de referência, que se desenvolvem na sujeição de um determinado nó, quando se permitem relaxações unitárias, em qualquer uma das direcções coordenadas, à sujeição de um nó ligado ao considerado por uma barra. Assim, $\widehat{xy_F}$ é o coeficiente de influência do nó F na direcção do eixo Ox, quando se dá uma relaxação unitária, na direcção do eixo Oy, ao nó M da barra MF.

Poder-se-á então escrever :

$$X_F = \widehat{xx_F} \cdot U + \widehat{xy_F} \cdot V + \widehat{zz_F} \cdot W ;$$

$$Y_F = \widehat{yz_F} \cdot U + \ldots\ldots\ldots , \text{ etc.}$$

o que, comparando com o sistema anterior, permite escrever :

$$- \widehat{xx_M} = \widehat{xx_F} = \rho_{MF} \, (\Delta x)^2$$

$$- \widehat{yy_M} = \widehat{yy_F} = \rho_{MF} \, (\Delta y)^2$$

$$- \widehat{zz_M} = \widehat{zz_F} = \rho_{MF} \, (\Delta z)^2$$

$$- \widehat{xy_M} = \widehat{xy_F} = \rho_{MF} \, (\Delta x \cdot \Delta y) = \widehat{yx_F} = - \widehat{yx_M}$$

$$- \widehat{yz_M} = \widehat{yz_F} = \rho_{MF} \, (\Delta y \cdot \Delta z) = \widehat{zy_F} = - \widehat{zy_M}$$

$$- \widehat{zx_M} = \widehat{zx_F} = \rho_{MF} \, (\Delta z \cdot \Delta x) = \widehat{xz_F} = - \widehat{xz_M}$$

É interessante verificar que estes coeficientes gozam da mesma propriedade dos percursos unitários de carga das equações de Maxwell :

$$\widehat{xy} = \widehat{xy} \ldots\ldots \text{ etc.}$$

Outro facto interessante a realçar é a independência destes coeficientes no que respeita à formação dos $\Delta\,\Delta$, pois, sendo obtidos pelo produto de dois factores, tanto faz definir estes como sendo $\Delta x = x_M - x_F$ ..... ou $\Delta x = x_F - x_M$ ..... , desde que o critério seja sempre o mesmo para as três variáveis x, y, z.

Resta referir que estes coeficientes dependem apenas do sistema de unidades utilizadas (1) e da configuração da estrutura em si, podendo ser fàcilmente obtidos se se seguir a sistematização que o Quadro I indica, para a estrutura referida na fig. 2

QUADRO AUXILIAR

Barras	L cm	E Kg/cm²	Ω mm²	$\rho = \frac{E}{L^3}$ Kg/cm³
A B	400	2.000.000	100	0,0328
B C	400	»	100	0,0328
C D	400	»	100	0,0328
A D	400	»	100	0,0328
A C	550	»	100	0,0126
B D	550	»	100	0,0177

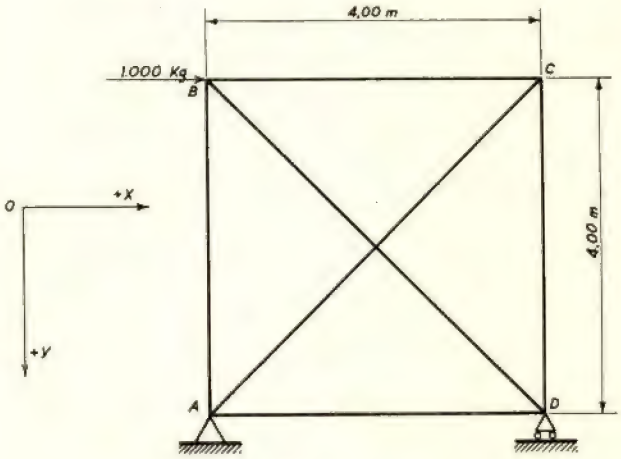


Fig. 2

Este quadro diz respeito, como se referiu, à estrutura plana da fig. 2 ; por isso nele não aparece a variável z. No caso de problemas no espaço, o aparecimento de z só complica o problema na medida em que acarreta maior volume de cálculo.

8 — Os coeficientes de influência não são os factores de operação, porque um nó é, pelo menos, formado por duas barras. Assim suponhamos que ao nó A estão ligados os nós B e C (fig. 3). Então a relaxação U_A de A, estando B

(1) As suas dimensões são as de força por unidade de comprimento.

QUADRO I (coeficientes de influência)

Unidades: quilo, centímetro

Barras	DADOS 1	2	3	4	5	$\widehat{x\,x}$ 6	$\widehat{y\,y}$ 7	$\widehat{x\,y} = \widehat{x\,y}$ 8
	ρ	Δx	Δy	col. 1 × col. 2	col. 1 × col. 3	col. 2 × col. 4	col. 3 × col. 5	col. 3 × col. 4 ou col. 2 × col. 5
A B	0,0328	0	— 400	0	— 13,12	0	5.248	0
B C	0,0328	400	0	13,12	0	5.248	0	0
C D	0,0328	0	400	0	13,12	0	5.248	0
A D	0,0328	400	0	13,12	0	5.248	0	0
A C	0,0126	400	— 400	5,05	— 5,05	2.020	2.020	— 2 020
B D	0,0177	400	400	7,08	7,08	2.832	2.832	2.832

Nota: As barras tanto podem ser tomadas no sentido A B, B C .... como, ao contrário B A, C B..... O necessário é manter a mesma convenção ao estabelecer os valores de Δx e Δy para cada barra, isto é, as diferenças entre as ordenadas x e y dos extremos de cada uma delas. Preenchidas as colunas 1 a 3, os valores das restantes obtêm-se formando os produtos indicados por baixo do número de ordem da respectiva coluna.

e C fixos, origina nas sujeições destes nós os esforços F_B, F_C, cujas componentes segundo os três eixos coordenados, são:

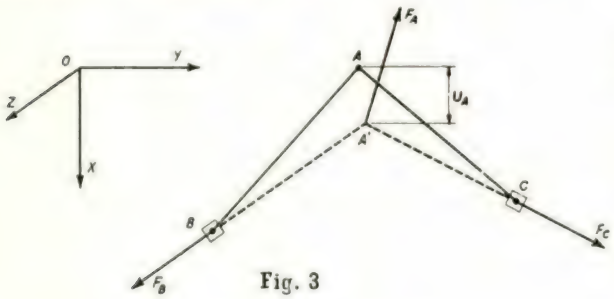


Fig. 3

$$X_A = U_A \times \begin{cases} \widehat{x\,x}_{AB} \text{ em B;} \\ \widehat{x\,x}_{AC} \text{ em C} \end{cases}$$

$$Y_A = U_A \times \begin{cases} \widehat{y\,x}_{AB} \text{ em B;} \\ \widehat{y\,x}_{AC} \text{ em C} \end{cases}$$

$$Z_A = U_A \times \begin{cases} \widehat{z\,x}_{AB} \text{ em B;} \\ \widehat{z\,x}_{AC} \text{ em C} \end{cases}$$

De um modo geral, e em virtude do já citado princípio da igualdade de acção e reacção, poderemos dizer que o factor de operação do nó A é a força F_A, cujas componentes segundo as três direcções coordenadas, devido à relaxação U_A, são:

$$\begin{aligned} X_A &= -\,U_A\,\Sigma_A\,\widehat{x\,x} \quad \text{em A} \\ Y_A &= -\,U_A\,\Sigma_A\,\widehat{y\,x} \quad \text{em A} \\ Z_A &= -\,U_A\,\Sigma_A\,\widehat{z\,x} \quad \text{em A} \end{aligned} \qquad (2)$$

Do mesmo modo se obtinham os factores relativos às relaxações V_A e W_A. Os somatórios estendem-se a todas as barras ligadas pelo nó A. No Quadro II ainda referente à estrutura da fig. 2, preenchido a partir do Quadro I, sistematiza-se o cálculo destes factores, de forma a conseguir-se a sua obtenção de um modo automático. Para a completa compreensão do modo de proceder são necessárias, no entanto, algumas considerações e desenvolvimentos.

QUADRO II (factores de operação)

Número	Tipo de relaxação	1 X_B	2 X_C	3 X_D	4 Y_B	5 Y_C	X_A	Y_A	Y_D	Somas
1	$U_B = 1$	— 8080	5248	2832	— 2832	0	0	0	2832	0
2	$U_C = 1$	5248	— 7268	0	0	2020	2020	— 2020	0	0
3	$U_D = 1$	2832	0	— 8080	2832	0	5248	0	— 2832	0
4	$V_B = 1$	— 2832	0	2832	— 8080	0	0	5248	2832	0
5	$V_C = 1$	0	2020	0	0	— 7268	— 2020	2020	5248	0

Consideremos por exemplo, a relaxação U_B, isto é, o deslocamento, segundo $\overline{Ox}$ do nó B, estando fixos A e C. As barras que cruzam em B são A B, B C e B D e por consequência X_B será obtido pela soma dos coeficientes de influência destas 3 barras. Os outros nós estão ligados a B apenas por uma barra e os seus factores, quando o nó B se relaxa, são assim os próprios coeficientes de influência destas barras. Convém ainda frizar a seguinte correspondência entre os Quadros II e I:

a	(U, X)	de II	corresponde	$(\widehat{xx})$	de I
»	(V, Y)	»	»	$(\widehat{yy})$	»
»	(U Y, V X)	»	»	$(\widehat{xy}, \widehat{yx})$	»

Formemos, então, alguns dos factores do quadro II:

$$U_B=1 \begin{cases} X_B = -(\overline{AB}\ 0 + \overline{AC}\ 5248 + \overline{BD}\ 2832) = -8080\ (\widehat{xx}) \\ X_C = +5248 = +5248\ (\widehat{xx}) \\ X_D = +2832 = +2832\ (\widehat{xx}) \\ Y_B = -(0 + 0 + 2832) = -2832\ (\widehat{yx}) \\ Y_C = 0 = 0\ (\widehat{yx}) \end{cases}$$

$$V_C=1 \begin{cases} X_B = \overline{BC}\ 0 = 0\ (\widehat{xy}) \\ X_C = -(0 + \overline{CD}\ 0 - \overline{AC}\ 2020) = +2020\ (\widehat{xy}) \\ X_D = 0 = 0\ (\widehat{xy}) \\ Y_B = 0 = 0\ (\widehat{yy}) \\ Y_C = -(0 + 5248 + 2020) = -7268\ (\widehat{yy}) \end{cases}$$

Repare-se que, de acordo com as fórmulas (2), os factores dos nós relaxados são negativos e os dos nós fixos, positivos.

Uma última observação diz respeito à inclusão embora distinta, de X_A, Y_A, Y_D. Na verdade estes factores não são necessários ao cálculo da estrutura da fig. 2, pois o nó A é fixo e o nó D só pode sofrer a relaxação U_D. Mas as suas formações permitirão verificar o Quadro II, pois a soma de cada uma das suas linhas será nula. Além disto, permitirão, como no exemplo adiante apresentado se verá, calcular as reacções de apoio.

9 — Calculados os factores de operação, temos a «ferramenta» necessária para realizar o *processo da relaxação*, isto é, a série de aproximações sucessivas que levarão ao conhecimento das deformações U_A, V_A, W_A que, em cada nó, tornam nulas as componentes X, Y, Z das forças exteriores.

Southwell demonstrou analìticamente que a série de resultados obtidos pela relaxação sucessiva de um sistema equilibrado de forças residuais é uma série convergente.

A este tipo de relaxação, em que se liberta de cada vez apenas a sujeição de um nó, mantendo todos os outros fixos, chamou o seu autor *relaxação de nó* (joint relaxation).

O facto de a série ser convergente não justifica só por si a adopção de este método como ferramenta de cálculo de estruturas; é necessário que esta convergência se consiga com rapidez tal que a aplicação desta técnica seja, na verdade, prática. Ora verifica-se que, quase sempre, isto não acontece com a relaxação de nó, ou que, pelo menos, a convergência pode ser muito apressada com outros tipos de relaxação, que adiante indicaremos.

Considera-se, geralmente, que, para efeitos práticos, as forças residuais são consideradas como anuladas quando o seu valor atinge 1 % do valor inicial; mas será sempre o problema em si, que indicará a precisão necessária (1).

As forças residuais iniciais são as forças exteriores, pois são estas as que correspondem às relaxações nulas.

As operações são feitas num quadro, dito de relaxação, e apenas utilizando operações aritméticas elementares.

Antes de terminar esta alínea, fazemos a aplicação da relaxação de nó, Quadro III, ao cálculo da estrutura que temos vindo a considerar, fig. 2.

Como se vê, a convergência é bastante lenta; não se achou conveniente levar as operações até ao fim para poder servir de prática às pessoas interessadas em o fazer. Convém no entanto dizer, para maior realce dos capítulos seguintes, que só se consegue terminar esta convergência ao fim de umas trinta e tal operações.

10 — Quando relaxamos as sujeições nodais de uma estrutura, pretendemos conseguir dar a essa

(1) Lògicamente, a precisão estará ligada com a «certeza» do valor fixado às acções exteriores.

QUADRO III (relaxação)

Unidades : quilo, centímetro

Tipo	Valor da relaxação	X_B	X_C	X_D	Y_B	Y_C
	F. iniciais	1000	0	0	0	0
1	0,127	—1000	655	353	— 353	0
		0	655	353	—353	0
2	0,089	267	—655	0	0	180
		267	0	353	—353	180
3	0,0437	127	0	—353	127	0
		394	0	0	—226	180
4	—0,0280	79	0	—79	226	0
		473	0	—79	0	180
1	0,0586	—473	307	167	—167	0
		0	307	88	—167	180
2	0,0423	221	—307	0	0	85
		221	0	88	—167	265
5	0,0365	0	74	0	0	—265
		221	74	88	—167	0
1	0,0273	—221	147	78	— 78	0
		0	221	166	—245	0
4	—0,0304	86	0	— 86	245	0
		86	221	80	0	0
2	0,0304	160	—221	0	0	62
		246	0	80	0	62
1	0,0303	—246	158	86	—86	0
		0	158	166	— 86	62

estrutura a deformação final que esta terá quando, por si só, suporte as cargas exteriores. Ora o deslocamento que um nó pode sofrer, quando os outros a que está ligado são mantidos fixos, é bastante reduzido e apenas obtido à custa da deformação das barras que o definem. Por consequência, a sua força residual é fàcilmente anulada por pequenas relaxações, visto que, apesar de pequenas, originam esforços elevados nas barras. Compreende-se assim que, em estruturas muito deformáveis, a convergência (isto é, a obtenção da deformada final) por sucessivas relaxações de nó seja muito lenta, e que o uso desta só por si seja insuficiente.

Felizmente a aplicação do princípio da sobreposição de efeitos permite definir outros tipos de relaxação que convenientemente aplicados, facilitam o atingir-se com rapidez a convergência procurada.

Consistem, simplesmente, em escolher as relaxações que mais ràpidamente conduzam a estrutura à sua deformação final. Assim, por exemplo, nós sabemos que a estrutura da fig. 2, ao deformar-se sob a acção de F, se desloca no sentido da força que a solicita, fig. 4. Podemos relaxar os nós B e C separadamente, relaxação de nó, mas a deformação conseguida é muito inferior à

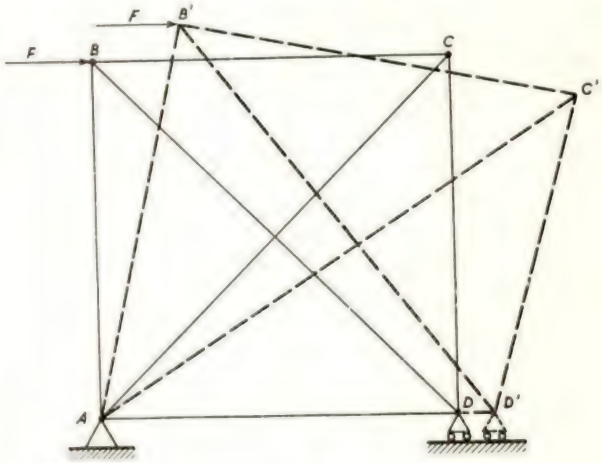


Fig. 4

obtida, se relaxarmos, por exemplo, simultâneamente B e C. Como a estrutura fica menos *sujeita*, só se consegue anular as forças residuais à custa de maiores relaxações; isto é, realiza-se desta forma uma convergência rápida da estrutura deformada. A este tipo de relaxação chama Southwell *relaxação de grupo* (group relaxation). Obtêm-se os seus factores de operação, agrupando convenientemente os correspondentes a cada nó.

Podem ser muito variadas; à sua conveniente escolha está ligado, em certas estruturas, o sucesso deste método.

É no estabelecimento destas relaxações que o engenheiro terá ocasião de pôr à prova a sua experiência e intuição; só o conseguirá correctamente se, desde o início, compreender a maneira como a estrutura se deforma.

Para realçar o grande interesse das relaxações de grupo, resolve-se no Quadro V o cálculo da estrutura da fig. 2.

Prèviamente forma-se o Quadro IV pela junção de três grupos de factores ao Quadro II. O primeiro foi já justificado; o segundo, do mesmo modo, resulta da observação de que o nó C se desloca no sentido positivo dos eixos O_x e O_y e de que é mais fácil obter o seu deslocamento

QUADRO IV (factores de operação)

Unidades: quilo, centímetro

	Número	Tipo de relaxação	X_B	X_C	X_D	Y_B	Y_C	X_A	Y_A	Y_D	Somas
Relaxação de nó	1	$U_B = 1$	− 8080	5248	2832	− 2832	0	0	0	2832	0
	2	$U_C = 1$	5248	− 7268	0	0	2020	2020	− 2020	0	0
	3	$U_D = 1$	2832	0	− 8080	2832	0	5248	0	− 2832	0
	4	$V_B = 1$	2832	0	− 2832	8080	0	0	− 5248	− 2832	0
	5	$V_C = 1$	0	2020	0	0	− 7268	− 2020	2020	5248	0
Relaxação de grupo	6	$U_B = U_C = 1$	− 2832	− 2020	2832	− 2832	2020	2020	− 2020	2832	0
	7	$U_C = V_C = 1$	5248	− 5248	0	0	− 5248	0	0	5248	0
	8	$U_D = -V_B = 1$	5664	0	− 10.912	10.912	0	5248	− 5248	− 5664	0

final se se relaxar simultâneamente na direcção do eixo dos x x e do eixo dos y y.

Já o terceiro grupo tem origem diferente; ele resultou da necessidade de anular, depois da relaxação tipo 7 do Quadro V, as forças residuais X_D e Y_B.

O conhecimento da deformação da estrutura serviu, neste caso, para nos guiar na atribuição de sinais a U_D e V_B. Aliás, há sempre vantagem na exacta atribuição dos sinais às relaxações que definem os factores de operação; as relaxações a fazer serão então positivas, se se quiser ter a certeza de estar a deformar convenientemente a estrutura [1].

O cálculo a seguir apresentado é levado, para completa compreensão, até à obtenção dos esforços nas barras.

Deformações totais

$$U_B = + (1) + (6) = 0{,}1240 + 0{,}1620 + 0{,}0355 + 0{,}0460 + 0{,}0105 + 0{,}0137 + 0{,}0017 = 0{,}394 \text{ cm}$$

$$U_C = + (6) + (7) = 0{,}1620 + 0{,}0620 + 0{,}0460 + 0{,}0178 + 0{,}0137 + 0{,}0052 = 0{,}3067 \text{ cm}$$

$$U_D = + (8) = 0{,}0740 + 0{,}0212 + 0{,}0061 = 0{,}1013 \text{ cm}$$

$$V_B = - (8) = - 0{,}1013 \text{ cm}$$

$$V_C = + (7) = 0{,}0620 + 0{,}0178 + 0{,}0052 = 0{,}0850 \text{ cm}$$

(1) Deve-se dizer, que por vezes (não é o caso do Quadro V), mesmo atribuindo bem os sinais, se é obrigado a fazer relaxações negativas para desfazer relaxações positivas exageradas.

QUADRO V (relaxação)

Unidades: quilo, centímetro

Número	Valor da relaxação	X_B	X_C	X_D	Y_B	Y_C
		1000	0	0	0	0
1	0,1240	− 1000	650	350	− 350	0
		0	650	350	− 350	0
6	0,1620	− 456	− 325	456	− 456	325
		− 456	325	806	− 806	325
7	0,0620	325	− 325	0	0	− 325
		− 131	0	806	− 806	0
8	0,0740	418	0	− 806	806	0
		287	0	0	0	0
1	0,0355	− 287	186	101	− 101	0
		0	186	101	− 101	0
6	0,0460	− 130	− 93	130	− 130	93
		− 130	93	231	− 231	93
7	0,0178	93	− 93	0	0	− 93
		− 37	0	231	− 231	0
8	0,0212	120	0	− 231	231	0
		83	0	0	0	0
1	0,0105	− 83	54	29	− 29	0
		0	54	29	− 29	0
6	0,0137	− 38	− 27	38	− 38	27
		− 38	27	67	− 67	27
7	0,0052	27	− 27	0	0	− 27
		− 11	0	67	67	0
8	0,0061	35	0	− 67	67	0
		24	0	0	0	0
1	0,0017	14	9	5	− 5	0
		10	9	5	5	0

Verificação

	Forças residuais					Reacções		
	X_B	X_C	X_D	Y_B	Y_C	$-X_A$	$-Y_A$	$-Y_D$
	1000	0	0	0	0			
$U_B = 0{,}3934$	−3178	2065	1114	−1114	0	0	0	1114
$U_C = 0{,}3067$	1610	−2229	0	0	620	620	−620	0
$U_D = 0{,}1013$	287	0	−819	287	0	532	0	−287
$V_B = -0{,}1013$	287	0	−287	819	0	0	−532	−287
$V_C = 0{,}0850$	0	171	0	0	−617	−171	171	446
	6	7	8	8	3	−981	+981	−986

Esforços nas barras

Obtêm-se a partir da fórmula:

$$P_{MF} = L\, \rho_{MF}\, (\Delta x\, U + \Delta y\, V)$$

Assim para a barra AC, será:

$$\rho_{AC} = 0{,}0126 \text{ kg/cm}^3 ; \quad L = 550 \text{ cm} ;$$
$$\Delta x = 400 \text{ cm} ; \quad \Delta y = -400 \text{ cm}$$

$$U = U_C - U_A = 0{,}3067 \text{ cm} ;$$
$$V = V_C - V_A = 0{,}0850 \text{ cm}$$

$$\rho_{AC} = 550 \times 0{,}0126\, (400 \times 0{,}3067 - 400 \times 0{,}0850) = 615 \text{ kg}$$

Barras	AB	BC	CD	AD	AC	BD
Esforços	532	−455	−446	532	615	−742

Como se vê, a aproximação conseguida é bastante boa: as reacções de apoio, exactamente iguais a 1.000 kg, são obtidas com um erro de 2 %.

11 — Entre as possíveis relaxações de grupo, Southwell definiu e estudou, com carácter de generalidade, uma que designou de *relaxação de bloco* (block relaxation).

Tem especial aplicação em estruturas sujeitas a grandes deformações. Estas serão mais ràpidamente atingidas se, por exemplo, dividirmos a estrutura em dois blocos (no caso da fig. 5: A, B, C, D, e E, F, G, H) e, mantendo-os indeformáveis à custa das suas sujeições, os transladarmos, relativamente um ao outro, como se indica a tracejado na figura.

O trabalho realizado pelas forças exteriores nesta translação é absorvido pelo trabalho interno das barras que ligam os dois blocos. Este trabalho origina, nas sujeições respectivas, forças que anularão as resultantes das acções exteriores sobre os dois blocos, pois o movimento destes em *relaxação livre*, só acabará quando isto aconte-

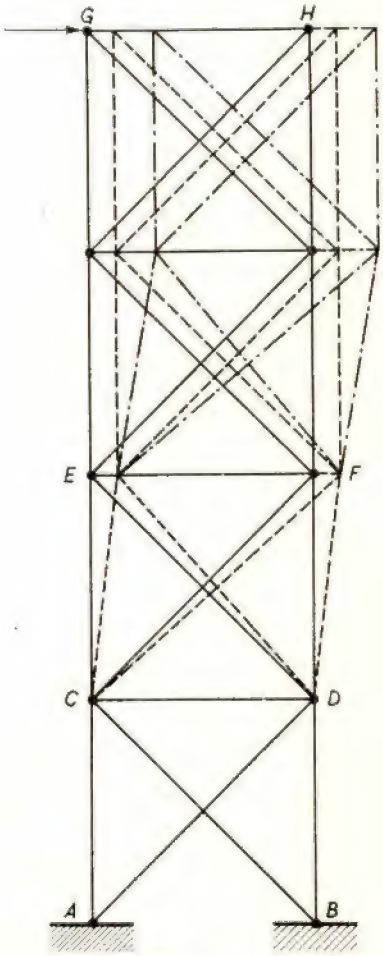


Fig. 5

cer. Quer dizer, se as acções sobre a estrutura formarem inicialmente um sistema em equilíbrio, a relaxação do bloco, ao dividi-las em dois grupos, origina ao mesmo tempo as forças necessárias para que cada um destes grupos formem, por sua vez, um sistema em equilíbrio.

Mas então, cada um destes blocos poderá ser dividido em outros dois mais pequenos, com a certeza de que a cada uma destas divisões e consequente relaxação, corresponde uma maior aproximação da deformação final da estrutura (fig. 5, traço-ponto), objectivo a conseguir, do modo mais rápido possível.

12 — É fácil, desde que se compreendeu a imagem física da relaxação de bloco, estabelecer as fórmulas que permitirão a sua sistematização.

Antes porém, abre-se um parentesis para esclarecer uma dúvida que possìvelmente se levantará: qual a razão porque a relaxação de bloco possui análise e fórmulas próprias, sendo afinal uma das muitas relaxações de grupo possíveis de estabelecer?

De facto, quando se falou deste tipo de relaxação disse-se que os seus factores de operação se obtinham simplesmente pela sobreposição dos factores de operação relativos aos nós abrangidos por esta operação. Parece então, que na primeira relaxação de bloco da fig. 4, bastaria considerar os factores dos nós E e F, os únicos relaxados, para, somando-os, se obter o factor de operação da relaxação de bloco considerada.

Assim seria se não desejássemos atingir o mais ràpidamente possível a deformação final da estrutura, fixando aqueles factores não para uma relaxação qualquer, mas sim para aquela que, como se disse, anula as forças actuantes em cada bloco e permite (fig. 5, 2.ª relaxação) novas aplicações sobre cada um dos blocos resultantes, pois nestes ainda actuarão sistemas *equilibrados* de forças.

A primeira coisa a fazer será então achar o valor daquela relaxação.

Considere-se ainda a fig. 5. O bloco A B C D mantém-se fixo; os seus valores terão um índice *f*, e os do bloco móvel, E F G H, são diferenciados pelo índice *m*.

Se designarmos por U a relaxação procurada, segundo o eixo O x, poderemos escrever:

$$-X_m = X_f = U \sum_{f,\,m} \widehat{xx}$$

$$-Y_m = Y_f = U \sum_{f,\,m} \widehat{yx}$$

$$-Z_m = Z_f = U \sum_{f,\,m} \widehat{zx}$$

em que X, Y, Z são as componentes das forças desenvolvidas sobre os blocos móvel e fixo pelas barras a que o somatório se estende, isto é, as barras E C, E D, F C, F D que ligam os dois blocos. Os coeficientes de equivalência $\widehat{xx}$, $\widehat{yx}$ e $\widehat{zx}$ já se sabem calcular e U será portanto determinado pela igualdade a estabelecer entre as componentes daquelas forças e as das acções exteriores actuantes sobre os dois blocos: no caso da fig. 5 e para o sistema de eixos arbitrado, estas são horizontais e portanto U será obtido a partir de X.

Determinado U e realizada a relaxação, as forças residuais sobre as sujeições dos nós E e F na direcção O x, serão:

$$F_E = R_E - X_E \; ; \quad F_F = R_F - X_F$$

R_E e R_F são as acções exteriores sobre os nós E e F; X_E e X_F são as acções exercidas pelas barras sobre os mesmos nós:

$$X_E = -U \sum_E{}' \widehat{xx} \; ; \quad X_F = -U \sum_F{}' \widehat{xx}$$

$\sum_E{}'$ e $\sum_F{}'$ dizem apenas respeito às barras que se cruzam nos nós E e F, respectivamente.

E são estas as expressões necessárias à aplicação sistemática da relaxação de bloco. Num dos exemplos que a seguir se apresentam, esta relaxação é aplicada sucessivamente de forma que se consegue, por fim, ter sobre as sujeições forças residuais que originam pequenas deformações da estrutura e que, portanto, podem ser anuladas pela aplicação sucessiva da relaxação de nó, auxiliada por aquela relaxação de grupo que foi achado conveniente aplicar. Isto é, a máxima rapidez da convergência obtém-se pela criteriosa aplicação dos três tipos de relaxação; e quando se tiver adquirido a sensibilidade e prática suficientes, poder-se-á concluir que o método da relaxação é na verdade uma poderosa ferramenta de cálculo de estruturas articuladas.

Conclui-se esta alínea com a apresentação de dois exemplos. O primeiro refere-se ainda à estrutura já considerada na fig. 2; achou-se que teria interesse comparar as aplicações dos três

tipos de relaxação ao cálculo de uma mesma estrutura, embora de ante-mão se saiba que a relaxação de bloco não está especialmente indicada para este caso.

O segundo exemplo é um caso típico de aplicação deste tipo de relaxação.

1.º Exemplo:

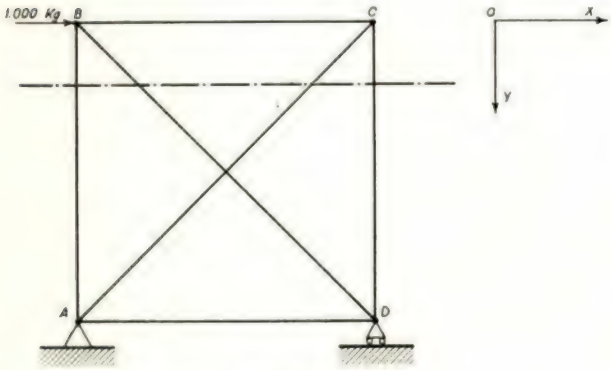


Fig. 6

a) Valor da relaxação de bloco ($X = U \sum_{f,\,m} \widehat{xx}$):

$$1000 = U \times \left| \begin{array}{lll} 0 & \text{de} & AB \\ 2832 & \text{de} & AC \\ 2020 & \text{de} & AC \\ 0 & \text{de} & AD \end{array} \right.$$

$$1000 = U \times 4852 \quad \text{donde} \quad U = 0{,}2061 \text{ cm}$$

b) Acções exercidas pelas barras sobre as sujeições:

$$X_B = -U \sum_B{}' \widehat{xx} = -0{,}2061 \times \times \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{de } AB \\ \underline{2832} & \underline{\text{de } BD} \end{array} \right. = -584 \text{ kg}$$

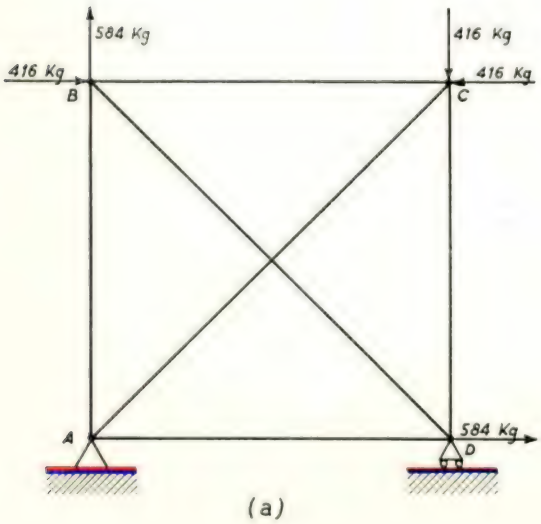
$$Y_B = -U \sum_B{}' \widehat{xy} = -0{,}2061 \times \times \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{de } AB \\ \underline{2832} & \underline{\text{de } BD} \end{array} \right. = -584 \text{ kg}$$

$$X_C = -U \sum_C{}' \widehat{xx} = -0{,}2061 \times \times \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{de } CD \\ \underline{2020} & \underline{\text{de } AC} \end{array} \right. = -416 \text{ kg}$$

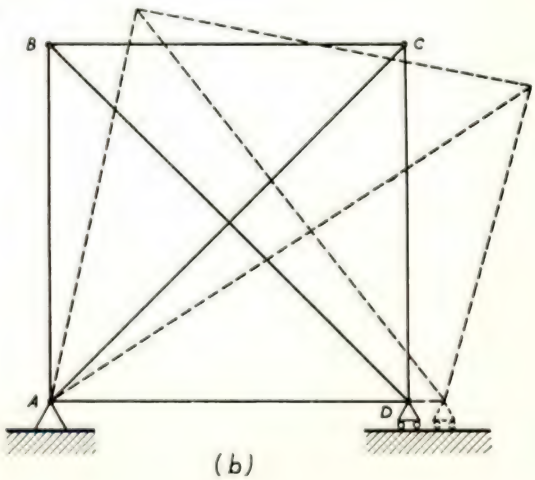
$$Y_C = -U \sum_C{}' \widehat{xy} = -0{,}2061 \times \times \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{de } CD \\ \underline{-2020} & \underline{\text{de } AC} \end{array} \right. = 416 \text{ kg}$$

$$X_D = U \sum_D{}' \widehat{xx} = -0{,}2061 \times \times \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{de } CD \\ \underline{2832} & \underline{\text{de } BD} \end{array} \right. = 584 \text{ kg}$$

c) Forças sobre as *sujeições* após a relaxação de bloco ($F = R - X$): estas forças e as deformações que originam estão indicadas na fig. 7 (a) e (b).



(a)



(b)

Fig. 7

QUADRO VI (Factores de operação)

Número	Tipo de relaxação	X_B	X_C	X_D	Y_B	Y_C	X_A	Y_A	Y_D	Somas
1	$U_B = 1$	—8080	5248	2832	—2832	0	0	0	2832	0
2	$U_C = 1$	5248	—7268	0	0	2020	2020	—2020	0	0
3	$U_D = 1$	2832	0	—8080	2832	0	5248	0	—2832	0
4	$V_B = -1$	2832	0	—2832	8080	0	0	5248	2832	0
5	$V_C = 1$	0	2020	0	0	—7268	—2020	2020	5248	0
6	$U_B = U_D = 1$	—5248	5248	—5248	0	0	5248	0	0	0
7	$U_B = U_C = 1$	—2832	—2020	2832	—2832	2023	2020	—2020	2832	0

QUADRO VII — Relaxação

Tipo	Valor da relaxação	X_B	X_C	X_D	Y_B	Y_C
		416	—416	584	—584	416
6	0,0793	—416	416	—416	0	0
		0	0	168	—584	416
4	0,0723	205	0	—205	584	0
		205	0	—37	0	416
5	0,0573	0	116	0	0	—416
		205	116	—37	0	0
7	0,0723	—205	—146	205	205	146
		0	—36	168	—205	146
4	0,0253	72	0	—72	205	0
		72	—36	96	0	146
5	0,0201	0	41	0	0	—146
		72	5	96	0	0
3	0,0119	34	0	—96	34	0
		106	5	0	34	0
7	0,0374	—106	—75	106	—106	75
		0	—70	106	—72	75
3	0,0131	37	0	—106	37	0
		37	—70	0	—35	75
5	0,0103	0	21	0	0	—75
		37	—49	0	—35	0
4	0,0043	12	0	—12	35	0
		49	—49	—12	0	0
1	0,0048	—39	25	14	—14	0
		10	—14	2	—14	0

Esforços nas barras

Barras	AB	BC	CD	AD	AC	BD
Esforços	534	—441	—460	547	632	—752

2.º Exemplo:

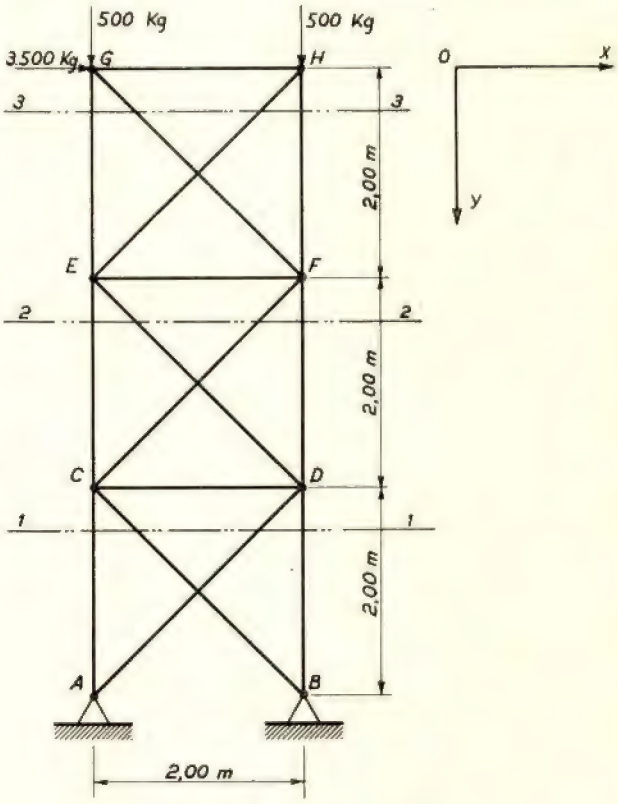


Fig. 8

QUADRO AUXILIAR

Barras	L cm	E k/cm²	Ω mm²	ρ kg/cm³
AC, CE, EG BD, DF, FH	200	2.100.000	1.000	2,625
CD, EF, GH	200	2.100.000	500	1,318
AD, CF, EH	283	2.100 000	500	0,463
BC, DE, FG	283	2.100 000	500	0,463

QUADRO VIII — Coeficientes de influência

Unidades: quilo, centímetro

Barras	ρ	Δx	Δy	$\rho \Delta x$	$\rho \Delta y$	$\widehat{xx}$	$\widehat{yy}$	$\widehat{xy}$ $\widehat{yx}$
AC, CE, EG BD, DF, FH	2,625	0	— 200	0	525	0	105×10^3	0
CD, EF, GH	1,318	200	0	263,6	0	$52,72 \times 10^3$	0	0
AD, CF, EH	0,463	200	— 200	92,6	— 92,6	$18,52 \times 10^3$	$18,52 \times 10^3$	$-18,52 \times 10^3$
BC, DE, FG	0,463	— 200	— 200	— 92,6	— 92,6	$18,52 \times 10^3$	$18,52 \times 10^3$	$18,52 \times 10^3$

1.º – Relaxação de bloco (corte 1,1 fig. 8).

a) Valor da relaxação ($X = U \sum_{m,f} \widehat{xx}$):

$$3500 = U \times \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{de AC} \\ 18,52 \times 10^3 & \text{de BC} \\ 18,52 \times 10^3 & \text{de AD} \\ 0 & \text{de BD} \end{array} \right.$$

$$3500 = U \times 37,04 \times 10^3 \quad \therefore$$

$$\therefore U_C = U_D = U_E = U_F = U_G = U_H = 0,09450 \text{ cm}$$

b) Componentes dos esforços das barras ($X = \pm U \Sigma' \widehat{xx}$; $Y = \pm U \Sigma' \widehat{xy}$):

$$X_C = -0,09450 \times \times \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{de AC} \\ 18,52 \times 10^3 & \text{de BC} \end{array} \right. = -1750 \text{ kg}$$

$$Y_C = -0,09450 \times \times \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{de AC} \\ 18,52 \times 10^3 & \text{de BC} \end{array} \right. = -1750 \text{ kg}$$

$$X_D = -0,09450 \times \times \left| \begin{array}{ll} 18,52 \times 10^3 & \text{de AD} \\ 0 & \text{de BD} \end{array} \right. = -1750 \text{ kg}$$

$$Y_D = -0,09450 \times \times \left| \begin{array}{ll} -18,52 \times 10^3 & \text{de AD} \\ 0 & \text{de BD} \end{array} \right. = 1750 \text{ kg}$$

2.º – Relaxação de bloco (corte 2,2).

a) Valor da relaxação:

$$U_E = U_F = U_G = U_H = 0,09450 \text{ cm}$$

b) Componentes dos esforços das barras

$X_E = X_F = -1750$ kg ; $X_C = X_D = 1750$ kg

$Y_E = -1750$ kg ; $Y_F = 1750$ kg ;

$Y_C = -1750$ kg ; $Y_D = 1750$ kg

3.º Relaxação de bloco (corte 3,3).

a) Valor da relaxação:

$$U_G = U_H = 0,09450 \text{ cm}$$

b) Componentes dos esforços das barras:

$X_G = X_H = -1750$ kg ; $X_E = X_F = 1750$ kg

$Y_G = -1750$ kg ; $Y_H = 1750$ kg ;

$Y_E = -1750$ kg ; $Y_D = 1750$ kg

Forças sobre as sujeições após as três relaxações de bloco, fig. 9, e deformação presumível da estrutura, fig. 10.

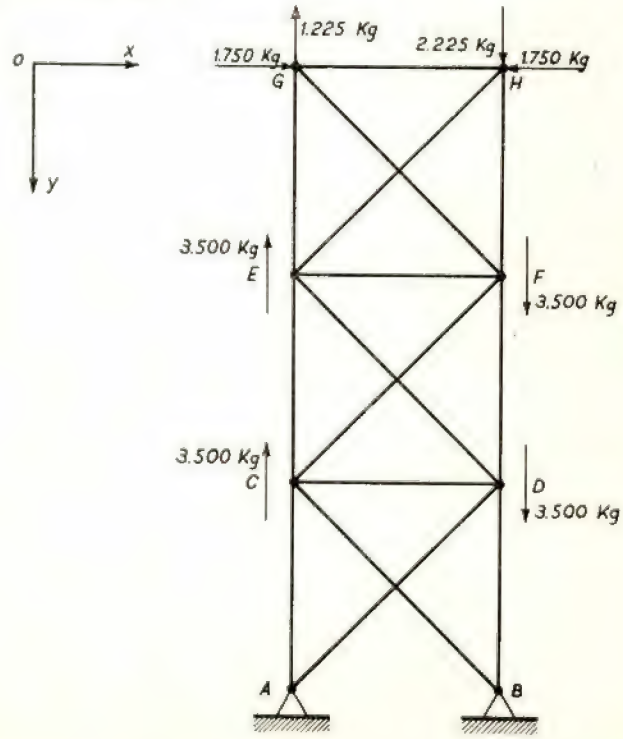


Fig. 9

QUADRO X — Relaxação

Unidades: quilo, centímetros

Tipos	Valor da relaxação 10^{-3}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
		X_C	X_D	X_E	X_F	X_G	X_H	Y_C	Y_D	Y_E	Y_F	Y_G	Y_H	
14	F. iniciais 32,00	0 —1185	0 0	0 — 969	0 0	1750 1185	—1750 1561	—3500 1185	3500 —1185	—3500 2154	3500 —3595	—1225 1185	2225 —3698	1
13	30,00	—1185 0	0 —1111	— 969 0	0 — 750	2935 1306	— 189 1111	—2315 1111	2315 —1111	—1346 4270	— 95 —1861	— 40 2408	—1473 —1111	2
15	26,77	—1185 0	— 1111 0	— 969 496	— 750 992	4241 —2408	922 911	—1204 0	1204 0	2924 — 496	—1956 992	2368 — 992	—2584 496	3
16	107,99	—1185 0	—1111 0	— 473 2000	242 2000	1833 —2000	1833 —2000	—1204 0	1204 0	2428 — 2000	— 964 2000	1376 —2000	—2088 2000	4
17	54,00	—1185 1000	—1111 1000	1527 —2000	2242 —2000	— 167 1000	— 167 1000	—1204 —1000	1204 1000	428 0	1036 0	— 624 1000	—88 —1000	5
20	8,92	— 185 0	— 111 0	— 473 165	242 165	833 0	833 0	—2204 2204	2204 —2204	428 — 771	1036 771	376 0	—1088 0	6
10	8,90	— 185 — 165	— 111 0	— 308 0	407 0	833 165	833 0	0 165	0 934	— 343 0	1807 —2199	376 165	—1088 934	7
9	2,10	— 350 0	— 111 — 39	— 308 0	407 0	998 0	833 39	165 — 221	934 — 39	— 343 519	— 392 0	541 — 221	— 154 — 39	8
16	75,59	— 350 0	— 150 0	— 308 1400	407 1400	998 —1400	872 —1400	— 56 0	895 0	176 —1400	— 392 1400	320 —1400	— 193 1400	9
14	11,00	— 350 — 407	— 150 0	1092 — 333	1807 0	— 402 407	— 528 537	— 56 407	895 — 407	—1224 741	1008 —1236	—1080 407	1207 —1271	10
13	7,50	— 757 0	— 150 — 278	759 0	1807 — 188	5 326	9 278	351 278	488 — 278	— 483 1067	— 228 — 465	— 673 602	— 64 — 278	11
17	45,90	— 757 850	— 428 850	759 —1700	1619 —1700	331 850	287 850	629 — 850	210 850	584 0	— 693 0	— 71 850	— 342 — 850	12
16	75,59	93 0	422 0	— 941 1400	— 81 1400	1181 —1400	1137 —1400	— 221 0	1060 0	584 —1400	— 693 1400	779 —1400	—1192 1400	13
13	5,80	93 0	422 — 215	459 0	1319 — 145	— 219 252	— 263 215	221 215	1060 — 215	— 816 826	707 — 360	— 621 466	208 — 215	14
14	6,00	93 — 222	207 0	459 — 181	1174 0	33 222	— 48 293	— 6 222	845 — 222	10 404	347 — 674	— 155 222	— 7 — 693	15
16	54,00	— 129 0	207 0	278 1000	1174 1000	255 —1000	245 —1000	216 0	623 0	414 —1000	— 327 1000	67 —1000	— 700 1000	16
17	54,00	— 129 1000	207 1000	1278 — 2000	2174 — 2000	— 745 1000	— 755 1000	216 —1000	623 1000	— 586 0	673 0	— 933 1000	300 —1000	17
18	37,80	871 —1400	1207 —1400	— 722 — 700	174 700	255 0	245 0	— 784 0	1623 0	— 586 700	673 — 700	67 0	— 700 0	18
20	6,07	— 529 0	— 193 0	— 22 112	874 112	255 0	245 0	— 784 1500	1623 —1500	114 — 524	— 27 524	67 0	— 700 0	19
19	4,05	— 529 — 75	— 193 — 75	90 0	986 0	255 75	245 75	716 — 350	123 350	— 410 1000	497 —1000	67 — 350	— 700 350	20
16	75,59	— 604 0	— 286 0	90 1400	986 1400	330 —1400	320 —1400	366 0	473 0	590 —1400	— 503 1400	— 283 —1400	— 350 1400	21
17	59,40	— 604 1100	— 286 1100	1490 —2200	2386 —2200	—1070 1100	—1080 1100	366 —1100	473 1100	— 810 0	897 0	—1683 1100	1050 —1100	22
14	9,00	496 — 333	832 0	— 710 — 272	186 0	30 333	20 439	— 734 333	1573 — 333	— 810 606	897 —1011	— 583 333	— 50 —1040	23
13	9,00	163 0	832 — 333	— 982 0	186 — 225	363 391	459 333	— 401 333	1240 — 333	— 204 1281	— 114 — 558	— 250 722	—1090 — 333	24
16	64,79	163 0	499 0	— 982 1200	— 39 —1200	754 —1200	792 —1200	— 68 0	907 0	1077 —1200	— 672 1200	472 —1200	—1423 1200	25
17	54,00	163 1000	499 1000	218 —2000	—1161 —2000	— 446 1000	— 408 1000	— 68 —1000	907 1000	— 123 0	528 0	— 728 1000	— 223 —1000	26
18	40,50	1163 —1500	1499 —1500	—1782 750	— 839 750	554 0	592 0	—1068 0	1907 0	— 123 750	528 — 750	272 0	—1223 0	27
20	4,05	— 337 0	— 1 0	—1032 75	— 89 75	554 0	592 0	—1068 1000	1907 —1000	627 — 350	— 222 350	272 0	— 1223 0	28
16	43,20	— 337 0	— 1 0	— 957 800	— 14 800	554 — 800	592 — 800	— 68 0	907 0	277 — 800	128 800	272 — 800	—1223 800	29
10	2,83	— 337 — 52	— 1 0	— 157 0	786 0	— 246 52	— 208 0	68 52	907 297	— 523 0	928 — 700	— 528 52	— 423 297	30
13	5,62	— 389 0	— 1 — 208	— 157 0	786 — 141	— 194 245	— 208 208	— 16 208	1204 — 208	— 523 800	228 — 349	— 476 451	— 126 — 208	31
17	20,11	— 389 372	— 209 372	157 — 745	645 — 745	51 372	0 372	192 — 372	996 372	277 0	— 121 0	— 25 372	— 334 — 372	32
16	27,00	— 17 0	163 0	— 902 500	— 100 500	423 — 500	372 — 500	— 180 0	1368 0	277 — 500	— 121 500	347 — 500	— 706 500	33
8	6,47	— 17 0	163 0	— 402 120	400 0	— 77 0	— 128 0	— 180 0	1368 —1600	— 223 120	379 682	— 153 0	— 206 0	34
10	3,30	— 17 — 61	163 0	— 282 0	400 0	— 77 61	— 128 0	— 180 61	— 232 346	— 103 0	1061 — 850	— 153 61	— 206 346	35
14	1,21	— 78 — 45	163 0	282 — 37	400 0	— 16 45	— 128 59	— 119 45	114 — 45	— 103 82	211 — 136	— 92 45	140 — 140	36
4	4,46	— 123 83	163 0	— 319 245	400 — 400	29 83	— 69 0	— 74 — 83	69 0	— 21 0	75 0	— 47 83	0 0	37
2	1,82	— 40 96	163 — 163	— 74 34	0 0	112 0	— 69 0	— 157 0	69 0	— 21 34	75 0	36 0	0 0	38
7	0,64	56 0	0 0	— 40 0	0 12	112 0	— 69 0	— 157 157	69 0	13 — 67	75 — 12	36 0	0 0	39
5	1,56	56 0	0 0	— 40 0	12 29	112 — 112	— 69 83	0 0	69 0	— 54 0	63 29	36 — 29	0	40
		56	0	— 40	41	0	14	0	69	— 54	92	7	0	

QUADRO IX (factores de operação)

Unidades: quilo, centímetro

Número	Tipo de relaxação	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12					Somas
		X_C	X_D	X_E	X_F	X_G	X_H	Y_C	Y_D	Y_E	Y_F	Y_G	Y_H	X_A	X_B	Y_A	Y_B	
1	$U_B = 1 \times 10^{-3}$	−89,76	52,72	0	18,52	0	0	0	0	0	−18,52	0	0	0	18,52	0	18,52	0
2	$U_D = 1 \times 10^{-3}$	52,72	−89,76	18,52	0	0	0	0	0	18,52	0	0	0	18,52	0	−18,52	0	0
3	$U_E = 1 \times 10^{-3}$	0	18,52	−89,76	52,72	0	18,52	0	18,52	0	0	0	−18,52	0	0	0	0	0
4	$U_F = 1 \times 10^{-3}$	18,52	0	52,72	−89,76	18,52	0	−18,52	0	0	0	18,52	0	0	0	0	0	0
5	$U_G = 1 \times 10^{-3}$	0	0	0	18,52	−71,24	52,72	0	0	0	18,52	−18,52	0	0	0	0	0	0
6	$U_H = 1 \times 10^{-3}$	0	0	18,52	0	52,72	−71,24	0	0	−18,52	0	0	18,52	0	0	0	0	0
7	$V_C = -1 \times 10^{-3}$	0	0	0	18,52	0	0	247,04	0	−105,00	−18,52	0	0	0	−18,52	−105,00	−18,52	0
8	$V_D = 1 \times 10^{-3}$	0	0	18,52	0	0	0	0	−247,04	18,52	105,00	0	0	−18,52	0	18,52	105,00	0
9	$V_E = -1 \times 10^{-3}$	0	−18,52	0	0	0	18,52	−105,00	−18,52	247,04	0	−105,00	−18,52	0	0	0	0	0
10	$V_F = 1 \times 10^{-3}$	−18,52	0	0	0	18,52	0	18,52	105,00	0	−247,04	18,52	105,00	0	0	0	0	0
11	$V_G = -1 \times 10^{-3}$	0	0	0	−18,52	18,52	0	0	0	−105,00	−18,52	123,52	0	0	0	0	0	0
12	$V_H = 1 \times 10^{-3}$	0	0	−18,52	0	0	18,52	0	0	18,52	105,00	0	−123,52	0	0	0	0	0
13	$V_C = -1$; $V_E = -2$ $V_G = -2{,}35 \times 10^{-3}$	0	−37,04	0	−25,00	43,52	37,04	37,04	−37,04	142,33	−62,04	80,27	−37,04	0	−18,52	−105,00	−18,52	0
14	$V_D = 1$; $V_F = 2$ $V_H = 2{,}636 \times 10^{-3}$	−37,04	0	−30,29	0	37,04	48,81	37,04	−37,04	67,33	−112,33	37,04	−115,56	−18,52	0	18,52	105,00	0
15	$U_G = 2 \times 10^{-3}$ $U_H = 1 \times 10^{-3}$	0	0	18,52	37,04	−89,76	34,20	0	0	−18,52	37,04	−37,04	18,52	0	0	0	0	0
16	$U_G = 1 \times 10^{-3}$ $U_H = 1 \times 10^{-3}$	0	0	18,52	18,52	−18,52	−18,52	0	0	−18,52	18,52	−18,52	18,52	0	0	0	0	0
17	$U_E = 1 \times 10^{-3}$ $U_F = 1 \times 10^{-3}$	18,52	18,52	−37,04	−37,04	18,52	18,52	−18,52	18,52	0	0	18,52	−18,52	0	0	0	0	0
18	$U_C = 1 \times 10^{-3}$ $U_D = 1 \times 10^{-3}$	−37,04	−37,04	18,52	18,52	0	0	0	0	18,52	−18,52	0	0	−18,52	18,52	18,52	18,52	0
19	$V_E = -1 \times 10^{-3}$ $V_F = 1 \times 10^{-3}$	−18,52	−18,52	0	0	18,52	18,52	−86,48	86,48	247,04	−247,04	−86,48	86,48	0	0	0	0	0
20	$V_C = -1 \times 10^{-3}$ $V_D = 1 \times 10^{-3}$	0	0	18,52	18,52	0	0	247,04	−247,04	−86,48	86,48	0	0	−18,52	−18,52	−86,48	86,48	0

Forma-se em seguida o quadro dos coeficientes de operação: primeiramente os relativos às relaxações de nó e depois, a partir destes, os de várias relaxações de grupo. É na formação destes últimos que reside, em parte, o bom sucesso da

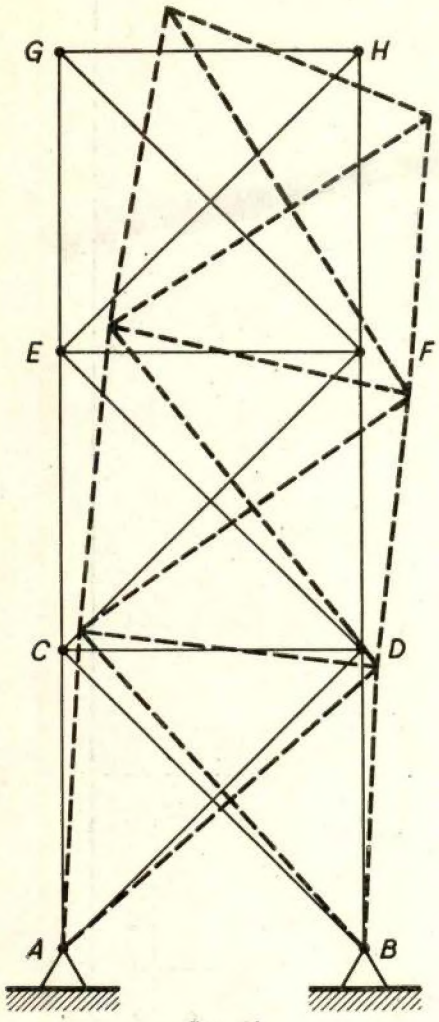


Fig. 10

nossa tentativa de cálculo: nos números 13 e 14 admitiu-se que os deslocamentos verticais dos nós são proporcionais às forças; na n.º 15 atendeu-se à compressão da barra G H e nas n.os 16, 17 e 18 aos deslocamentos horizontais; as n.os 19 e 20 são impostas pela própria operação de relaxação e são ajustamentos dos n.os 13 e 14.

Além da conveniente escolha das relaxações de grupo existe um outro facto com enorme influência na rapidez com que se consegue anular as forças residuais. Consiste ele em que as relaxações verticais, tipo 13 e 14, fazem aparecer sobre as sujeições horizontais, forças com o mesmo sentido em cada par de nós do mesmo nível, e vice-versa.

Quere dizer, será necessário, quando se relaxa verticalmente ou horizontalmente, fazê-lo para além da anulação das forças residuais, isto é,

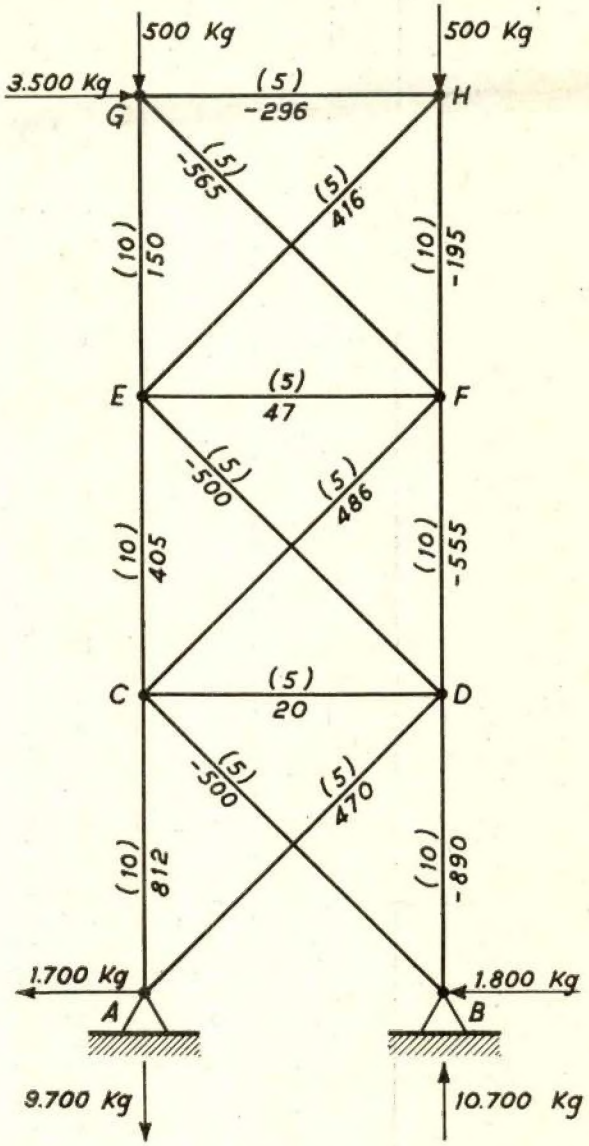


Fig. 11

de forma a originar nas sujeições forças com sentido inverso, pois que, relaxando em seguida na outra direcção, estas forças ficarão de novo com o sentido primitivo. No fundo, isto permite-nos, em cada operação de relaxação, dar à estrutura maiores deformações e por consequência atingir mais ràpidamente a deformada final.

É esta a ideia orientadora da relaxação feita; todas as suas operações se enquadram nela e

QUADRO XI — Verificação

Relaxações Totais	Forças residuais												Reacções de apoio			
	X_C	X_D	X_E	X_F	X_G	X_H	Y_C	Y_D	Y_E	Y_F	Y_G	Y_H	$-X_A$	$-X_B$	$-Y_A$	$-Y_B$
	0	0	0	0	3500	0	0	0	0	0	500	500				
$U_C = 0{,}17280$	−15.511	9.110	0	3200	0	0	0	0	0	−3200	0	0	0	−3200	0	−3200
$U_D = 0{,}17462$	9206	−15.674	3234	0	0	0	0	0	3234	0	0	0	−3234	0	3234	0
$U_E = 0{,}47641$	0	8823	−42763	25.116	0	8823	0	8823	0	0	0	−8823	0	0	0	0
$U_F = 0{,}48087$	8906	0	25.351	−43.263	8906	0	−8906	0	0	0	8906	0	0	0	0	0
$U_G = 0{,}86235$	0	0	0	15.971	−61434	45.463	0	0	0	15.971	−15.971	0	0	0	0	0
$U_H = 0{,}83402$	0	0	15.446	0	43.970	−59416	0	0	−15.446	0	0	15.446	0	0	0	0
$V_C = -0{,}07760$	0	0	0	1437	0	0	19.170	0	−8148	−1437	0	0	0	1437	8148	1437
$V_D = 0{,}08472$	0	0	1569	0	0	0	0	−20929	1569	8896	0	0	1569	0	−1569	−8896
$V_E = -0{,}12199$	0	−2259	0	0	0	2259	−12809	−2259	30.136	0	−12809	−2259	0	0	0	0
$V_F = 0{,}13750$	−2547	0	0	0	2547	0	2547	14.434	0	−33.668	2547	14438	0	0	0	0
$V_G = -0{,}13611$	0	0	0	−2541	2521	0	0	0	−14292	−2521	16.812	0	0	0	0	0
$V_H = 0{,}15608$	0	0	−2891	0	0	2891	0	0	2891	16.388	0	−19279	0	0	0	0
	54	0	−54	40	10	20	2	73	−56	29	−15	23	−1665	−1763	9813	−10.659